TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Fakultät für Mathematik

Seminar Vektorwertige Funktionen

Folgenräume

Rüdiger Borsdorf Almut Eisenträger

WS 2004/2005

Betreuer: Herr Prof. P. Stollmann

Definition 1 (Erinnerung: Norm)
Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Norm *auf E ist eine Funktion $\|\cdot\| : E \mapsto \mathbb{R}_+$ mit folgenden Eigenschaften:*

(N1) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{K},\ x \in E$.

(N2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in E$. (Dreiecksungleichung)

(N3) $\|x\| = 0$ gilt nur für $x = 0$.

Definition 2 (Normierte Folgenräume)
Der Raum aller Folgen ω ist ein ∞-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum.
Ein normierter Folgenraum *λ ist ein Unterraum von ω, welcher mit einer Norm $\|\cdot\|$ versehen ist und für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Folge $e_n := (\delta_{j,n})_{j\in\mathbb{N}}$ enthält.*

Offensichtlich ist der Raum aller *finiten Folgen*

$$\varphi := \left\{ x \in \omega : x = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j e_j, \lambda_j \in \mathbb{K}, N \in \mathbb{N} \right\}$$

Unterraum jedes normierten Folgenraumes.

Beispiel 3 (normierte Folgenräume)
Raum aller beschränkten Folgen mit Supremumsnorm:

$$l_\infty := \{x \in \omega : \|x\|_\infty := \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j| < \infty\}$$

Raum aller konvergenten Folgen: $c \subset l_\infty$
Raum aller Nullfolgen: $c_0 \subset c$

Definition 4

$$l_p := \left\{ x \in \omega : \|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

Wir wollen zeigen, dass l_p ist ein normierter Folgenräum für $1 \leq p < \infty$ ist:

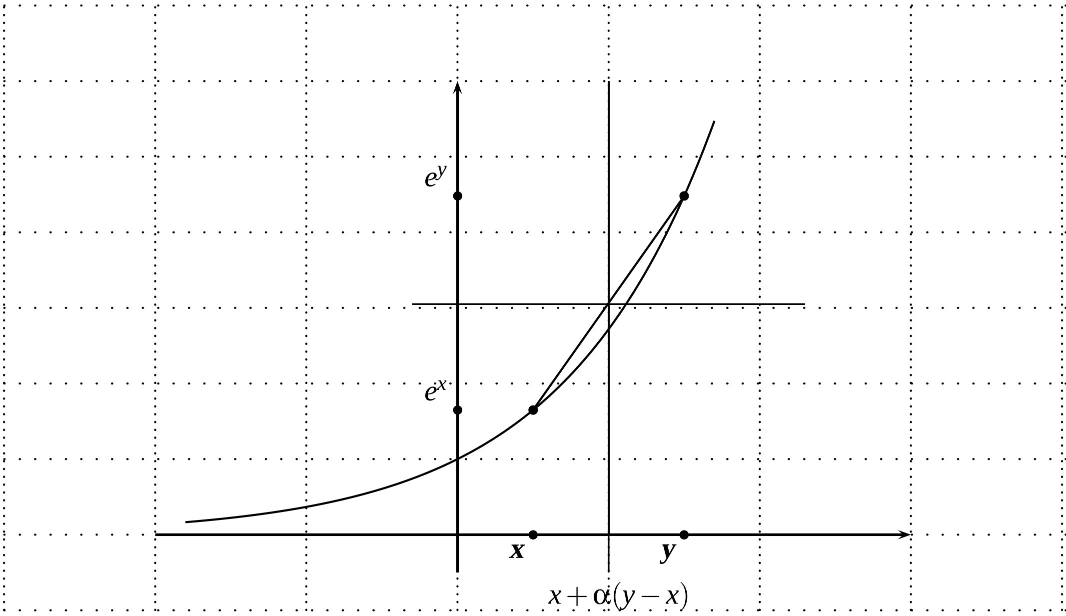
Zunächst:

Definition 5 (konvex)
Eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ heißt konvex*, wenn $\forall x, y \in \mathbb{R}^m,\ \alpha \in [0,1]$ gilt:*

$$f(x + \alpha(y - x)) \leq f(x) + \alpha(f(y) - f(x))$$

Lemma 6
Die Exponentialfunktion e^x ist konvex. *Das heißt:*

$$e^{x+\alpha(y-x)} \leq e^x + \alpha(e^y - e^x)$$



Beweis: *Ohne Einschränkung sei $y \geq x$.*

$$\begin{aligned}
e^{x+\alpha(y-x)} &= e^x - e^x + \alpha e^x - \alpha e^x + e^x \cdot e^{\alpha(y-x)} \\
&= e^x - \alpha e^x + e^x \left((\alpha - 1) + e^{\alpha(y-x)}\right) \\
&\overset{(*)}{\leq} e^x - \alpha e^x + e^x \left((\alpha - 1) + \alpha \frac{e^y}{e^x} + (1-\alpha)\right) \\
&= e^x - \alpha e^x + \alpha e^y \\
&= e^x + \alpha(e^y - e^x)
\end{aligned}$$

Zu (*):

$$\begin{aligned}
e^{\alpha(y-x)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\alpha(y-x))^n \\
&= \frac{1}{0!}\alpha^0 \cdot (y-x)^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(\alpha)^n (y-x)^n \\
&\leq 1 + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(y-x)^n \qquad (da\ \alpha \in [0,1]) \\
&= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(y-x)^n + (1-\alpha) \\
&= \alpha e^{y-x} + (1-\alpha) \\
&= \alpha \frac{e^y}{e^x} + (1-\alpha)
\end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 7 (Höldersche Ungleichung)
Seien $p, q \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sind $x \in l_p$ und $y \in l_q$, so ist $(x_j y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in l_1, und es gilt:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

Beweis: *Für $a, b > 0$ setze $A := p \ln a$, $B := q \ln b$. Da die Exponentialfunktion e^x konvex ist, gilt:*

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{A}{p} + \frac{B}{q}\right) &= \exp\left(B + \frac{1}{p}(A-B)\right) \\
&\overset{\text{Lemma 3.6}}{\leq} \exp(B) + \frac{1}{p}(\exp(A) - \exp(B)) \\
&= \frac{1}{p}\exp(A) + \frac{1}{q}\exp(B)
\end{aligned}$$

Einsetzen:
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
a \cdot b &= \exp\left(\frac{1}{p} p \ln(a)\right) \exp\left(\frac{1}{q} q \ln(b)\right) \\
&\leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q
\end{aligned}$$

Sind nun $x \in l_p$ und $y \in l_q$ mit $\|x\|_p = 1 = \|y\|_q$ gegeben, so erhält man hieraus:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j||y_j| \leq \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p + \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Sind $x \neq 0, y \neq 0$ gegeben, so wenden wir das eben Gezeigte auf $x' := \frac{x}{\|x\|_p}$ und $y' := \frac{y}{\|y\|_q}$ an und erhalten nach Multiplikation mit $\|x\|_p\|y\|_q$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

q.e.d.

Lemma 8
Seien p, $q \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für jedes $x \in \omega$:

$$\|x\|_p = sup\left\{ |\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j| : y \in \varphi, \|y\|_q \leq 1 \right\} \qquad \text{(Supremumsformel)}$$

wobei die Gleichheit in $[0,\infty]$ gemeint ist.

Beweis: *"$\geq$"*
Ist $x \in \omega$ mit $\|x\|_p < \infty$ gegeben, so folgt aus der Hölderschen Ungleichung:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \|x\|_p \qquad \forall y \in \varphi \text{ mit } \|y\|_q \leq 1.$$

Daher ist das betrachtete Supremum höchstens $\|x\|_p$.
"$\leq$"

Ist andererseits für $x \in \omega, x \neq 0$ das betrachtete Supremum gleich $C \in \mathbb{R}_+$, so wählen wir $\lambda \in \omega$ mit $|\lambda_j| = 1$ und $\lambda_j x_j = |x_j|$ $\forall j \in \mathbb{N}$. Für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$ existiert dann $A := \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p\right)^{-\frac{1}{q}}$. Wir definieren $y \in \varphi$ durch $y_j = A\lambda_j |x_j|^{\frac{p}{q}}$ für $1 \leq j \leq N$ und $y_j = 0$ für

$j > N$. *Dann gilt nach Wahl von A:*

$$\begin{aligned}
\|y\|_q &= \left(\sum_{j=1}^{N} |A\lambda_j|x_j|^{\frac{p}{q}}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= A\left(\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j|^q|x_j|^p\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\overset{|\lambda|=1}{=} A\left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{q}} = 1
\end{aligned}$$

Wegen $p = 1 + \frac{p}{q}$ *erhält man* $\forall N \in \mathbb{N}$*:*

$$\begin{aligned}
C &\geq |\sum_{j=1}^{N} x_j y_j| = |\sum_{j=1}^{N} A\underbrace{x_j\lambda_j}_{=|x_j|}|x_j|^{\frac{p}{q}}| \\
&= A|\sum_{j=1}^{N} |x_j|^{1+\frac{p}{q}}| \\
&= A|\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p| = \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p\right)^{1-\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow x \in l_p$ *und* $C \geq \|x\|_p \Rightarrow$ *Behauptung.*
q.e.d.

Satz 9
Für $1 \leq p < \infty$ *ist* l_p *ist ein normierter Folgenraum:*

Beweis:
Für $l_1 := \{x \in \omega : \|x\|_1 := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|\right) < \infty\}$ *klar.*

Für $1 < p < \infty$:

Sei $q := \frac{p}{p-1}$*, dann ist* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Für beliebige* $x,y \in l_p$ *und* $\forall z \in \omega$ *mit* $\|z\|_q \leq 1$ *gilt daher:*

$$|\sum_{j=1}^{N} (x_j + y_j)z_j| \overset{\text{Dr.-Ungl.}}{\leq} |\sum_{j=1}^{N} x_j z_j| + |\sum_{j=1}^{N} y_j z_j| \qquad \text{für } N \in \mathbb{N}$$

Für $N \to \infty$ gilt daher:

$$|\sum_{j=1}^{\infty}(x_j+y_j)z_j| \le |\sum_{j=1}^{\infty}x_jz_j| + |\sum_{j=1}^{\infty}y_jz_j| \le \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Nach Lemma 3.8 $\Rightarrow$

$$\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p \;\forall\, x,y \in l_p.$$

q.e.d.

Lemma 10
Sei $q \in [1,\infty)$, $x \in l_q$. Dann gilt:

$$\|x\|_p \to \|x\|_\infty := \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j| \text{ für } p \to \infty$$

Beweis: *1) Für $x = 0$ ist $\|x\|_p = \|x\|_\infty = 0 \Rightarrow$* Behauptung
2) Für $x \neq 0$:
a) Z.z.: $\|x\|_\infty \le \|x\|_p \quad \forall p \in [1,\infty)$
Setze $k := \min\{j : |x_j| = \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j|\}$
$\Rightarrow |x_k| = \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j| =: \|x\|_\infty$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{|x_j|}{|x_k|}\right)^p = \underbrace{\sum_{j=1, j\neq k}^{\infty}\left(\frac{|x_j|}{|x_k|}\right)^p}_{\ge 0} + \underbrace{\left(\frac{|x_k|}{|x_k|}\right)^p}_{=1} \ge 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p \ge |x_k|^p$$

$$\Leftrightarrow \|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ge |x_k| = \|x\|_\infty$$

b) Z.z.: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, p_0 \in [1,\infty) : \quad \forall p \ge p_0 : \quad \|x\|_p \le \|x\|_\infty + \varepsilon$
Sei $\varepsilon > 0$.
Setze $k := \min\{j : |x_j| = \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j|\} \Rightarrow |x_k| = \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j| =: \|x\|_\infty$
Definiere:

$$b := \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^q\right) = (\|x\|_q)^q < \infty$$

$$p_0 := \max\left\{ q, \left(\frac{\ln\left(\frac{|x_k|^q}{b}\right)}{\ln\left(\frac{|x_k|}{|x_k|+\varepsilon}\right)} \right) \right\}$$

Dabei gilt:

$$\frac{|x_k|}{|x_k|+\varepsilon} < 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{|x_k|}{|x_k|+\varepsilon}\right) < 0$$

$$b = |x_k|^q + \sum_{j=1, j\neq k}^{\infty} |x_j|^q \geq |x_k|^q \quad \Rightarrow \frac{|x_k|^q}{b} \leq 1 \quad \Rightarrow \ln\left(\frac{|x_k|^q}{b}\right) \leq 0$$

Sei $p \geq p_0$. Dann gilt:

$$p \geq \left(\frac{\ln\left(\frac{|x_k|^q}{b}\right)}{\ln\left(\frac{|x_k|}{|x_k|+\varepsilon}\right)} \right)$$

$$\Rightarrow p \ln\left(\frac{|x_k|}{|x_k|+\varepsilon}\right) \leq \ln\left(\frac{|x_k|^q}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{|x_k|}{|x_k|+\varepsilon}\right)^p \leq \ln\left(\frac{|x_k|^q}{b}\right)$$

e^x streng monoton wachsend

$$\Rightarrow \left(\frac{|x_k|}{|x_k|+\varepsilon}\right)^p \leq \left(\frac{|x_k|^q}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{|x_k|^{p-q}}{(|x_k|+\varepsilon)^p} \leq \frac{1}{b}$$

Da $|x_k| = \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j|$ und $p - q \geq 0$ gilt $\forall j \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \frac{|x_j|^{p-q}}{(|x_k|+\varepsilon)^p} \leq \frac{1}{b}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{|x_j|}{|x_k|+\varepsilon}\right)^p &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|x_j|^{p-q}}{(|x_k|+\varepsilon)^p} |x_j|^q \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{b} |x_j|^q \\ &= \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^q \\ &= \frac{1}{b} b = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \leq (|x_k| + \varepsilon)^p$$

$$\Rightarrow \|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq |x_k| + \varepsilon = \|x\|_\infty + \varepsilon$$

Damit folgt aus a) und b):
$\Rightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \|x\|_\infty + \varepsilon \quad \forall p \geq p_0, p_0 = p_0(\varepsilon)$
$\Rightarrow \|x\|_p \to \|x\|_\infty$ für $p \to \infty$. *q.e.d.*

Corollar 11
Die Supremumsformel gilt auch für

$$\|x\|_\infty = sup \left\{ |\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j| : y \in \varphi, \|y\|_1 \leq 1 \right\}$$

$$\|x\|_1 = sup \left\{ |\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j| : y \in \varphi, \|y\|_\infty \leq 1 \right\}$$

Beweis: *Betrachte* $p \to \infty$ *mit* $q = \frac{p}{p-1}$ *bzw.* $q \to \infty$ *mit* $p = \frac{q}{q-1}$. *q.e.d.*

Definition 12 (Dualraum eines Folgenraumes)
Sind λ *und* μ *normierte Folgenräume, so schreiben wir* $\mu = \lambda'$*, falls:*
(D1) Für jedes $y \in \mu$ *und jedes* $x \in \lambda$ *konvergiert die Reihe*

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j =: y(x)$$

und definiert ein Element $y(\cdot)$ *von* λ'*, für welches* $\|y(\cdot)\|_{\lambda'} = \|y\|_\mu$ *gilt.*
(D2) Zu jedem $\eta \in \lambda'$ *gibt es ein* $y \in \mu$ *mit* $y(\cdot) = \eta$.

Die Schreibweise $\mu = \lambda'$ bedeutet also, dass die Zuordnung $y \mapsto y(\cdot)$ ein isometrischer Isomorphismus zwischen μ und λ' ist.

Erinnere:

$$\|\eta\|_{\lambda'} = \sup\{|\eta(x)| : x \in \lambda, \|x\|_\lambda \leq 1\}$$

Satz 13
Für $p, q \in (1, \infty)$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *gilt* $l'_p = l_q$*. Ferner gelten* $c'_0 = l_1$ *und* $l'_1 = l_\infty$.

Beweis: "$l_p' = l_q$":
(D1) Für $y \in l_q$ und $x \in l_p$ folgt aus der Hölderschen Ungleichung die absolute Konvergenz der Reihe

$$y(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

sowie die Abschätzung

$$|y(x)| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \text{ d. h. } \|y(\cdot)\|_{l_p'} \leq \|y\|_q.$$

Aus der Supremumsformel folgt (nach Vertauschen von p und q)

$$\begin{aligned} \|y\|_q &= \sup\left\{ |\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j| : x \in \varphi, \|x\|_p \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup\{|y(x)| : x \in l_p, \|x\|_p \leq 1\} \\ &= \|y(\cdot)\|_{l_p'}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|y(\cdot)\|_{l_p'} = \|y\|_q$
(D2) Für $\eta \in l_p'$ definiere $y \in \omega$ durch $y_j = \eta(e_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Für $x \in l_p$ gilt

$$x = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right) \quad \text{in } l_p$$

Daher impliziert $\eta \in l_p'$

$$\eta(x) = \lim_{n\to\infty} \eta \left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \eta(e_j) \right) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j = y(x).$$

$\Rightarrow y(\cdot) = \eta$
Daraus folgt wie oben, dass $\|y\|_q \leq \|\eta\|_{l_p'} < \infty$. Und somit gilt $y \in l_q$.
"$c_0' = l_1$":

(D1) Für $y \in l_1$ und $x \in c_0$ gilt

$$
\begin{aligned}
|y(x)| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| \right) |y_j| \right) \\
&= \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| \right) \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |y_j| \\
&= \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| \right) \sum_{j=1}^{\infty} |y_j| \\
&= \|x\|_{c_0} \|y\|_{l_1}
\end{aligned}
$$

Damit ist die Reihe absolut konvergent und definiert ein $y(\cdot) \in c_0'$ mit $\|y(\cdot)\|_{c_0'} \leq \|y\|_{l_1}$.
$\|y(\cdot)\|_{c_0'} \geq \|y\|_{l_1}$
folgt nach Lemma 3.12 aus der Supremumsformel wie oben.

(D2) Analog wie oben

"$l_1' = l_\infty$": Analog zu "$c_0' = l_1$" *q.e.d.*

Wir wollen zeigen, dass l_p (für $p \in [1,\infty]$), c und c_0 Banachräume sind. Zuvor einige Vorbetrachtungen:

Lemma 14
Sei E,F normierte Räume; ist F ein Banachraum (vollständiger normierter Vektorraum), so ist $L(E,F) := \{A : E \mapsto F, A \text{ linear, stetig}\}$ ein Banachraum.

Beweis: *Z.z.: $L(E,F)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (Abgeschlossenheit)*

Seien A,B $\in$ L(E,F); $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$ bel.

$$
\begin{aligned}
\|(A+B)x\| &= \|Ax+Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \\
&\leq \|A\|\|x\| + \|B\|\|x\| = (\|A\| + \|B\|)\|x\|
\end{aligned}
$$

$$\|(\lambda A)x\| = \|\lambda(Ax)\| \leq |\lambda|\|A\|\|x\|$$

$\Rightarrow$ *A+B ste und λA ste; Linearität klar.* $\Rightarrow$ *A+B und λA in L(E,F)*
$\Rightarrow$ *$L(E,F)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum*

Norm von L(E,F) klar.
Noch z.z.: L(E,F) vollständig.
Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *CF in L(E,F), so gilt:*

$$\text{Zu jedem } \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ mit } \|A_n - A_m\| < \varepsilon \quad \forall n,m \geq N(\varepsilon) \qquad (*)$$

fixiert man $x \in E$*, so folgt aus (*) und*

$$\|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\| \leq \underbrace{\|A_n - A_m\|}_{\leq\varepsilon}\|x\|,$$

dass $(A_n x)$ *CF in F. Da F Banachraum, existiert* $\lim_{n\to\infty} A_n x =: Ax$.
Z.z. $A \in L(E,F)$.
Die so definierte Abbildung $A:\ E \mapsto F$ *ist linear.*
Noch z.z.: A ist stetig.
aus (*) $\Rightarrow$

$$\|Ax - A_m x\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x - A_m x\| \leq \varepsilon\|x\| \quad \forall x \in E;\ m \geq N(\varepsilon) \qquad (**)$$

Daher gilt mit $\varepsilon = 1$*:*

$$\begin{aligned} \|Ax\| &\overset{\text{Dr.-U.}}{\leq} \|Ax - A_m x\| + \|A_m x\| \\ &\overset{(**)}{\leq} 1\cdot\|x\| + \|A_m\|\|x\| \\ &= (1 + \|A_m\|)\|x\| \qquad \forall x \in E;\ m \geq N(1) \qquad (***) \end{aligned}$$

Sei nun weiter $z, y \in E$

$$(***) \Rightarrow \|Az - Ay\| = \|A(z-y)\| \leq (1 + \|A_m\|)\|z - y\|$$

$\Rightarrow$ *A stetig* $\Rightarrow$ *L(E,F) vollständig*

q.e.d.

Lemma 15
c_0 *und* c *sind vollständig.*

Beweis: *Sei* $((x_n)^m)$ *CF in* $c \Rightarrow\ \exists (y_n)$ *mit* $(x_n)^m \to (y_n)$ *in* l_∞*, da* l_∞ *Dualraum und damit nach Lemma 3.14 vollständig ist* $(c \subset l_\infty)$.
Z.z.: (y_n) *ist konvergente Folge*
Es gilt: $\forall \varepsilon \geq 0\ \exists m \geq m_0 \in \mathbb{N}$ *für das gilt:*

$$\|x_n^m - y_n\|_\infty = \sup_n |x_n^m - y_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

außerdem gilt: $\forall m\ \exists \tilde{x}^m : \forall \varepsilon\ \exists n \geq n_0 \in \mathbb{N}$*, so dass*

$$|x_n^m - \tilde{x}^m| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{da } (x_n)^m \text{ in c} \qquad (*)$$

$$\begin{aligned} |y_n| &= |y_n - x_n^m + x_n^m - \tilde{x}^m + \tilde{x}^m| \\ &\leq |y_n - x_n^m| + |x_n^m - \tilde{x}^m| + |\tilde{x}^m| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + |\tilde{x}^m| \qquad \text{für } n \geq n_0,\ m \geq m_0 \end{aligned}$$

umgekehrt ist:

$$\begin{aligned} |\tilde{x}^m| &= |\tilde{x}^m - x_n^m + x_n^m - y_n + y_n| \\ &\leq |\tilde{x}^m - x_n^m| + |x_n^m - y_n| + |y_n| \\ &\leq \varepsilon + |y_n| \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ (y_n)$ *konvergent.*

Z.z.: c_0 *vollständig*
Sei $(x_n)^m$ *CF in* $c_0 \ \Rightarrow\ \exists (y_n)$ *mit* $(x_n)^m \to (y_n)$ *in* l_∞*, da* $c_0 \subset l_\infty$ *z.z.:* (y_n) *ist Nullfolge*
Beweis analog. *q.e.d.*

Definition 16 (Reflexivität)
Es sei $(E, \|\cdot\|_E)$ *ein Banachraum. Ist die sogenannte* kanonische Inklusion

$$J : E \mapsto E'' \quad \text{mit} \quad x \mapsto (x' \mapsto x'(x))$$

(d.h. $J(x)[x'] = x'(x)$*) surjektiv, so nennt man* E *einen* reflexiven *Banachraum.*

Corollar 17
a) Für $1 < p < \infty$ *ist* l_p *ein reflexiver Banachraum.*
b) $c_o,\ c,\ l_1$ *und* l_∞ *sind Banachräume.*
c) c_o *ist nicht reflexiv.*

Beweis: *Z.z.: Vollständigkeit*
Für $p \in [1, \infty]$ *sind die Räume* l_p *Dualräume nach Satz 3.13 und damit vollständig nach Lemma 3.14 (*$E = \lambda$*,* $F = \mathbb{R}$*,* $L(\lambda, \mathbb{R}$ *bzw.* $\mathbb{C}) = \lambda'$*).* c *und* c_0 *sind vollständig nach Lemma 3.15. Damit sind sie vollständige normierte Vektorräume, also Banachräume.*

Z.z.: Für $p \in (1, \infty)$ *ist* l_p *reflexiv.*
Sind $p, q \in (1, \infty)$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, so gelten* $l_p' = l_q$ *und* $l_q' = l_p$*, also* $l_p'' = l_p$*. Für* $x \in l_p$ *und* $y \in l_q$ *folgt:*

$$J(x)[y] = y(x) \stackrel{!}{=} x(y)$$

$$y(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j = \sum_{j=1}^{\infty} y_j x_j = x(y)$$

$\Rightarrow J$ *ist surjektiv.* $\Rightarrow l_p$ *ist reflexiv.*

Z.z.: c_0 *ist nicht reflexiv.*
Für $x \in c_0$ *und* $y \in l_1$ *folgt auf die gleiche Weise, dass* $J(c_0) = c_0 \neq l_\infty$*. Also ist hier J nicht surjektiv.* *q.e.d.*

Bemerkung:
Die Banachräume c, l_1 und l_∞ sind nicht reflexiv.

Begründung:
Ein abgeschlossener Unterraum eines reflexiven Banachraumes ist ebenfalls reflexiv. (Ohne Beweis) c_0 ist ein abgeschlossener Unterraum von c und l_∞ und ist nicht reflexiv. Damit können auch c und l_∞ nicht reflexiv sein.
Ein Banachraum ist genau dann reflexiv, wenn sein Dualraum reflexiv ist. (Ohne Beweis)
Da c_0 nicht reflexiv ist, ist auch sein Dualraum $l_1 = c_0'$ nicht reflexiv.

Quellen:

Meise, R.; Vogt, D.:	Einführung in die Funktionalanalysis; Vieweg Studium 62: Aufbaukurs Mathematik; Braunschweig/Wiesbaden 1992
Stollmann, P.:	Vorlesung “Functional analysis”; Technische Universität Chemnitz, WS2002/2003