



TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Fakultät für Mathematik

Geometrisch exakte Modellierung einer elastischen dünnen Platte mittels Energieminimierung

Praktikumsbericht im Rahmen
des Modellierungsseminars 2007/2008

Almut Eisenträger

`almut.eisentraeger@s2003.tu-chemnitz.de`

Chemnitz, 15. Januar 2008

Prüfer: Dr. R. Schneider und Dr. U. Streit

Betreuer: Dr.-Ing. J. Linn, Fraunhofer ITWM



Fraunhofer

Institut
Techno- und
Wirtschaftsmathematik

Eisenträger, Almut

Geometrisch exakte Modellierung einer elastischen dünnen Platte mittels Energieminimierung

Praktikumsbericht im Rahmen des Modellierungsseminars 2007/2008

Fakultät für Mathematik

Technische Universität Chemnitz, Januar 2008

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 5 |
| 2 | Herleitung der Energiefunktion | 6 |
| 2.1 | Modellansatz: Die Kirchhoffplatte | 6 |
| 2.2 | Modell der stark gebogenen Platte | 6 |
| 2.3 | Geometrisch exakte Deformationsenergie aus der Differentialgeometrie | 9 |
| 2.4 | Bestimmung der Normkoeffizienten | 11 |
| 3 | Diskretisierung und Implementierung | 16 |
| 3.1 | Vorbemerkung | 16 |
| 3.2 | Diskretisierung | 17 |
| 3.3 | Numerische Integration | 18 |
| 3.4 | Finite Differenzen | 19 |
| 3.5 | Randbedingungen | 20 |
| 3.5.1 | Vorbemerkung | 20 |
| 3.5.2 | B – Fest eingespannter Rand | 21 |
| 3.5.3 | S – Einfach gelagerter Rand | 21 |
| 3.5.4 | F – Freier Rand | 22 |
| 3.6 | Zwangsbedingung an den Ecken | 23 |
| 3.7 | Besonderheiten der Implementierung | 24 |
| 4 | Beispiele und Auswertung | 27 |
| 4.1 | Allgemeine Parameter | 27 |
| 4.2 | Erste Beispiele | 28 |
| 4.3 | Verdrehte Platte | 34 |
| 4.4 | Aposteriori-Test der Randbedingungen am freien Rand | 36 |
| 4.5 | Validierung | 37 |
| 5 | Ausblick | 40 |

1 Einleitung

In dem Praktikum beschäftigten wir uns mit einem Modell zur schnellen Berechnung der Deformationen einer elastischen, rechteckigen, dünnen Platte mittels Energieminimierung. Dabei wird zu Gunsten der Rechengeschwindigkeit bewusst auf eine hohe Genauigkeit verzichtet und nur eine qualitative Aussage mittels der Auslenkung an wenigen Knotenpunkten gefordert.

Zwei Projekte der Abteilung "Mathematische Methoden in Dynamik und Festigkeit" des Fraunhofer Instituts für Techno- und Wirtschaftsmathematik in Kaiserslautern führten zu diesem Praktikum. Die Echtzeit-Simulation von elastischen Kabeln für die Wegoptimierung von Roboterarmen mit Stromkabeln, Materialzuführungsschläuchen etc. ist eines davon. Dafür wurde ein mit der Kontinuumsmechanik konsistentes und schnell berechenbares Masse-Feder-Modell eines elastischen Biegebalkens entwickelt (siehe [1]). Ein weiteres Hauptaugenmerk der Abteilung ist auf die Modellierung und Simulation von Reifen gerichtet. Hierbei geht es unter anderem um die Entwicklung neuer Modelle, welche das Verhalten der Reifen für eine Mehrkörper-Simulation hinreichend genau abbilden, aber dennoch schneller zu berechnen sind, als komplette Modelle mittels der Methode der Finiten Elemente. In dem vorliegenden Bericht wird das Modell des Biegebalkens aus [1] auf zweidimensionale Objekte (Platten und Schalen) erweitert und für eine rechteckige Platte implementiert.

Die Aufgabe des Praktikums bestand darin, unter Zuhilfenahme von Methoden der Differentialgeometrie und Finiten Differenzen eine diskrete, aber geometrisch exakte Formel für die Gesamtenergie einer rechteckigen, elastischen, dünnen Platte unter Eigengewicht herzuleiten und zu implementieren, um durch Energieminimierung die Auslenkung der Platte numerisch approximieren zu können. Es sollte dabei hauptsächlich untersucht werden, ob diese Herangehensweise geeignet und sinnvoll ist um bekannte FEM-Modelle zu ersetzen und welche Probleme sich dabei ergeben.

In Kapitel 2 werden wir die geometrisch exakte Gesamtenergie aus der Differentialgeometrie herleiten. Deren Diskretisierung und Implementierung beschreiben wir in Kapitel 3. Erste Ergebnisse und Auswertungen werden in Kapitel 4 präsentiert und zuletzt geben wir einen kleinen Ausblick auf mögliche weitere Schritte in Kapitel 5.

2 Herleitung der Energiefunktion

2.1 Modellansatz: Die Kirchhoffplatte

In der Theorie dünner Platten nach Kirchhoff (siehe z. B. [2]) wird die Platte als *schubstarr* angenommen, d. h. eine Faser, die im undeformierten Zustand gerade und senkrecht zur Plattenebene ist, wird auch im deformierten Zustand als gerade und senkrecht zur Plattenebene angenommen. Damit sind alle Verschiebungen durch die Verformung der Mittelebene bestimmt und das Problem, die Verschiebungen zu ermitteln, reduziert sich auf die Betrachtung der Verformung der Mittelfläche.

2.2 Modell der stark gebogenen Platte

Als Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen beschäftigen wir uns mit den in der Strukturmechanik geläufigen Modellen einer elastischen Platte und den daraus resultierenden Energiefunktionen.

Das Modell der *stark gebogenen Platte* gilt – anders als der Name vermuten lässt – nicht für beliebige Verschiebungen. Es werden zwar „große“ Verschiebungen zugelassen, jedoch müssen die Verzerrungen, welche sich aus den Ableitungen der Verschiebungen berechnen, klein sein. Um dies zu gewährleisten, müssen die Verschiebungen klein im Vergleich zur Länge und Breite der Platte sein. Im Vergleich dazu müssen beim Modell der *schwach gebogenen Platte*, bei dem die Dehnung vernachlässigt wird, die Verschiebungen sogar klein im Vergleich zur Plattenstärke h sein, die ja ihrerseits bereits klein gegenüber der Länge und Breite ist.

Die folgenden Formeln für die Dehnungs- und Biegeenergie der stark gebogenen Platte sind [2] entnommen, wo sie durch Vernachlässigung Terme höherer Ordnung aus den Verschiebungen, Verzerrungen und der Krümmung hergeleitet werden. Sie sind teilweise geometrisch linear bzw. quadratisch und dienen letztlich nur zur Bestimmung der Konstanten für die geometrisch exakte Energiefunktion.

Die *Verschiebungen* sind definiert als

$$U(x, y) := \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ \zeta(x, y) \end{pmatrix} := r(x, y) - r^0(x, y), \quad (2.1)$$

wobei

$$r^0(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

die ebene undeformierte *Ausgangskonfiguration* der Plattenmittelfläche und

$$r(x, y) = \begin{pmatrix} r_1(x, y) \\ r_2(x, y) \\ r_3(x, y) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

die *aktuelle deformierte Konfiguration* der Platte ist. Daraus ergibt sich der *zweidimensionale Verzerrungstensor* zu

$$\begin{aligned} u_{xx} &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2, \\ u_{yy} &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2, \\ u_{xy} &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \\ u_{yx} &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = u_{xy}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Die nicht verschwindenden Komponenten des *Spannungstensors* sind definiert als

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1 - \nu^2} (u_{xx} + \nu u_{yy}), \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1 - \nu^2} (u_{yy} + \nu u_{xx}), \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1 + \nu} u_{xy} = \sigma_{yx}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

mit dem Young'schen Elastizitätsmodul E und der Querkontraktionszahl ν .

Daraus erhält man die geometrisch lineare *Dehungsenergie* wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \tilde{W}_D &= \frac{h}{2} \iint \sum_{i,j} (u_{ij} \sigma_{ij}) dx dy \\
 &= \frac{h}{2} \iint [u_{xx} \sigma_{xx} + u_{yy} \sigma_{yy} + 2u_{xy} \sigma_{xy}] dx dy \\
 &= \frac{h}{2} \iint \left[u_{xx} \frac{E}{1-\nu^2} (u_{xx} + \nu u_{yy}) + u_{yy} \frac{E}{1-\nu^2} (u_{yy} + \nu u_{xx}) + 2u_{xy} \frac{E}{1+\nu} u_{xy} \right] dx dy \\
 &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \iint [u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + 2\nu u_{xx} u_{yy} + 2(1-\nu) u_{xy}^2] dx dy.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Durch Einsetzen des Verzerrungstensors aus (2.4) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \tilde{W}_D &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right)^2 \right. \\
 &\quad + 2\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right) \\
 &\quad \left. + 2(1-\nu) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\
 &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^4 \right. \\
 &\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^4 \\
 &\quad + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \\
 &\quad + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \\
 &\quad \left. + (1-\nu) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + (1-\nu) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + (1-\nu) \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] dx dy.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Zudem ist die *Biegeenergie* geometrisch teilweise linear (in x - und y -Richtung) und teilweise quadratisch (in z -Richtung) gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \tilde{W}_B &= \frac{Eh^3}{24(1+\nu^2)} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left(\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \right] dx dy \\
 &= \frac{Eh^3}{24(1+\nu^2)} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right] dx dy.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.3 Geometrisch exakte Deformationsenergie aus der Differentialgeometrie

Da die Platte durch die Ausgangskonfiguration komplett parametrisiert ist, normalerweise hinreichend „glatt“ ist und sich nicht selbst durchdringt, kann sie nach folgender Definition aus [3] als *reguläre Fläche* betrachtet werden:

Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ ist eine *reguläre Fläche*, wenn es für jedes $p \in S$ eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^3$ gibt sowie eine Abbildung $\bar{x} : U \mapsto V \cap S$ einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ auf $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$, so dass gilt:

- (i) \bar{x} ist differenzierbar, d. h. wenn

$$\bar{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad \forall (u, v) \in U,$$

dann haben $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ stetige partielle Ableitungen beliebiger Ordnung.

- (ii) \bar{x} ist ein Homöomorphismus, d. h. \bar{x} ist stetig (nach (i)),

$$\bar{x}^{-1} : V \cap S \mapsto U$$

existiert und ist stetig, d. h. \bar{x}^{-1} ist die Einschränkung einer stetigen Abbildung

$$F : W \in \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2 \text{ mit } V \cap S \subset W.$$

- (iii) Für jedes $q \in U$ ist das Differential $d\bar{x}_q : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ injektiv (*Regularitätsbedingung*).

Für eine Parametrisierung $r(a)$ der Fläche sind die *erste* und *zweite Differentialform* gegeben durch den *metrischen Tensor*

$$G_{ij}(r(a)) = \frac{\partial r}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial r}{\partial a_j} \tag{2.9}$$

sowie den Krümmungstensor

$$B_{ij}(r(a)) = n \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial a_i \partial a_j}, \quad (2.10)$$

wobei

$$n := \frac{N}{\|N\|} := \frac{\frac{\partial r}{\partial a_1} \times \frac{\partial r}{\partial a_2}}{\left\| \frac{\partial r}{\partial a_1} \times \frac{\partial r}{\partial a_2} \right\|} \quad (2.11)$$

der Einheitsnormalenvektor an die Fläche in $r(a)$ ist. Diese Tensoren beschreiben die Dehnung und die Krümmung einer Fläche. Daher dient die Änderung dieser Größen als Maß für die Deformation der Plattenmittelfläche.

Mit der Parametrisierung (2.3) durch die Ausgangskonfiguration (2.2) ergeben sich folgende Deformationstensoren

$$G(x, y) = \begin{pmatrix} G_{xx} & G_{xy} \\ G_{yx} & G_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad G^0(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

$$B(x, y) = \begin{pmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} & n \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} \\ n \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x} & n \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \end{pmatrix}, \quad B^0(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Dies legt die folgenden Ausdrücke für die Dehnungs- und Biegeenergie nahe,

$$W_D = \iint \|G(x, y) - G^0(x, y)\|_\alpha^2 dx dy, \quad (2.14)$$

$$W_B = \iint \|B(x, y) - B^0(x, y)\|_\beta^2 dx dy, \quad (2.15)$$

mit noch zu bestimmenden Matrixnormen $\|\cdot\|_\alpha$ und $\|\cdot\|_\beta$.

In der Computergeometrie (siehe [4]) wird dazu häufig eine gewichtete Frobeniusnorm benutzt:

$$\|M\|^2 = \tilde{c}_{xx} M_{xx}^2 + \tilde{c}_{yy} M_{yy}^2 + 2\tilde{c}_{xy} M_{xy}^2 \quad (2.16)$$

Bei einem Koeffizientenvergleich mit den Energiefunktionen (2.7) und (2.8) zeigt sich jedoch, dass dieser Ansatz nicht allgemein genug ist, da einige in der Energie auftretenden Terme nicht hergeleitet werden können. Also muss man vom allgemeinen Ansatz

$$\|M\|^2 = \sum_{i,j,k,l} \tilde{c}_{ijkl} M_{ij} M_{kl} \quad (2.17)$$

ausgehen. Da hier nur symmetrische Tensoren/Matrizen betrachtet werden, kann dieser weiter zusammengefasst werden zu

$$\|M\|^2 = c_1 M_{xx}^2 + c_2 M_{yy}^2 + c_3 M_{xy}^2 + c_4 M_{xx} M_{yy} + c_5 M_{xx} M_{xy} + c_6 M_{yy} M_{xy}, \quad (2.18)$$

so dass nur noch je sechs Konstanten zu bestimmen sind.

Also betrachten wir die Dehnungsenergie

$$\begin{aligned} W_D = \iint & \left[\alpha_1 (G_{xx} - G_{xx}^0)^2 + \alpha_2 (G_{yy} - G_{yy}^0)^2 \right. \\ & + \alpha_3 (G_{xy} - G_{xy}^0)^2 + \alpha_4 (G_{xx} - G_{xx}^0) (G_{yy} - G_{yy}^0) \\ & \left. + \alpha_5 (G_{xx} - G_{xx}^0) (G_{xy} - G_{xy}^0) + \alpha_6 (G_{yy} - G_{yy}^0) (G_{xy} - G_{xy}^0) \right] dx dy \end{aligned} \quad (2.19)$$

und die Biegeenergie

$$\begin{aligned} W_B = \iint & \left[\beta_1 (B_{xx} - B_{xx}^0)^2 + \beta_2 (B_{yy} - B_{yy}^0)^2 \right. \\ & + \beta_3 (B_{xy} - B_{xy}^0)^2 + \beta_4 (B_{xx} - B_{xx}^0) (B_{yy} - B_{yy}^0) \\ & \left. + \beta_5 (B_{xx} - B_{xx}^0) (B_{xy} - B_{xy}^0) + \beta_6 (B_{yy} - B_{yy}^0) (B_{xy} - B_{xy}^0) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.4 Bestimmung der Normkoeffizienten

Zum Vergleich werden die Biegeenergie (2.8) und die Dehnungsenergie (2.7) nach [2] herangezogen. Da diese durch Vernachlässigung Terme höherer Ordnung entstanden sind, wenden wir hier eine äquivalente Vorgehensweise an und vereinfachen die Formeln aus Abschnitt 2.3 schrittweise.

Die Deformationsenergie wird in Abhängigkeit von den Verschiebungen U benötigt. Dazu wird zunächst die Änderung des metrischen Tensors (2.12) in dieser Form

dargestellt

$$\begin{aligned}
 G_{xx} - G_{xx}^0 &= \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} - 1 = \left(\frac{\partial r_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_3}{\partial x}\right)^2 - 1 \\
 &= \left(\frac{\partial(x+u)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y+v)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 - 1 \\
 &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 - 1 \\
 &= 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Unter Vernachlässigung der quadratischen Terme in u - (und v -) Richtung liefert das

$$G_{xx} - G_{xx}^0 \approx 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2. \tag{2.22}$$

Analog ergibt sich

$$\begin{aligned}
 G_{yy} - G_{yy}^0 &= 2\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2 \\
 &\approx 2\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

sowie für die Nicht-Diagonalelemente

$$\begin{aligned}
 G_{xy} - G_{xy}^0 &= G_{xy} = G_{yx} = \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \\
 &= \frac{\partial r_1}{\partial x} \frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\partial r_2}{\partial x} \frac{\partial r_2}{\partial y} + \frac{\partial r_3}{\partial x} \frac{\partial r_3}{\partial y} \\
 &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial\zeta}{\partial x} \frac{\partial\zeta}{\partial y} \\
 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial x} \frac{\partial\zeta}{\partial y} \\
 &\approx \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial x} \frac{\partial\zeta}{\partial y}.
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Daraus folgt für die Biegeenergie

$$\begin{aligned}
 W_D \approx \iint & \left[\alpha_1 \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \alpha_2 \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right)^2 \right. \\
 & + \alpha_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \\
 & + \alpha_4 \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right) \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right) \\
 & + \alpha_5 \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \\
 & \left. + \alpha_6 \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right] dx dy. \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

Die Konstanten α_i ergeben sich aus einem Koeffizientenvergleich von (2.7) und (2.25) zu

$$4\alpha_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \stackrel{!}{=} \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{Eh}{8(1-\nu^2)}, \quad (2.26)$$

$$4\alpha_2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \stackrel{!}{=} \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{Eh}{8(1-\nu^2)}, \quad (2.27)$$

$$\alpha_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \stackrel{!}{=} \frac{Eh}{4(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \Rightarrow \alpha_3 = \frac{Eh}{4(1+\nu)}, \quad (2.28)$$

$$4\alpha_4 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \stackrel{!}{=} \frac{Eh\nu}{(1-\nu^2)} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \alpha_4 = \frac{Eh\nu}{4(1-\nu^2)}, \quad (2.29)$$

$$2\alpha_5 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \stackrel{!}{=} 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \alpha_5 = 0, \quad (2.30)$$

$$2\alpha_6 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \stackrel{!}{=} 0 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \alpha_6 = 0. \quad (2.31)$$

Ein Vergleich mit den weiteren Koeffizienten führt zu keinem Widerspruch, so dass

diese Konstanten in (2.19) eingesetzt werden können

$$\begin{aligned}
 W_D = \frac{Eh}{8(1-\nu^2)} \iint & \left[(G_{xx} - G_{xx}^0)^2 + (G_{yy} - G_{yy}^0)^2 \right. \\
 & + 2(1-\nu)(G_{xy} - G_{xy}^0)^2 \\
 & \left. + 2\nu(G_{xx} - G_{xx}^0)(G_{yy} - G_{yy}^0) \right] dx dy.
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Auf gleiche Weise wird für die Biegeenergie verfahren. Um die Übersichtlichkeit zu bewahren, behandeln wir zunächst den Normalenvektor (2.11)

$$\begin{aligned}
 N = \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial r_2}{\partial x} \frac{\partial r_3}{\partial y} - \frac{\partial r_3}{\partial x} \frac{\partial r_2}{\partial y} \\ \frac{\partial r_3}{\partial x} \frac{\partial r_1}{\partial y} - \frac{\partial r_1}{\partial x} \frac{\partial r_3}{\partial y} \\ \frac{\partial r_1}{\partial x} \frac{\partial r_2}{\partial y} - \frac{\partial r_2}{\partial x} \frac{\partial r_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Damit ergibt sich für den Krümmungstensor

$$B_{xx} - B_{xx}^0 = B_{xx} = n \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \tag{2.34}$$

und analog

$$B_{yy} - B_{yy}^0 \approx \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}, \tag{2.35}$$

$$B_{xy} - B_{xy}^0 = B_{yx} - B_{yx}^0 \approx \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}. \tag{2.36}$$

Also folgt für die Biegeenergie aus (2.20)

$$\begin{aligned}
 W_B \approx \iint & \left[\beta_1 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 + \beta_2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + \beta_3 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 + \beta_4 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \right. \\
 & \left. + \beta_5 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right) + \beta_6 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Die Konstanten β_i ergeben sich aus dem Vergleich von (2.37) mit (2.8), so dass sie direkt in (2.20) eingesetzt werden können um die Biegeenergie

$$\begin{aligned}
 W_B = \frac{Eh^3}{24(1+\nu^2)} \iint \left[(B_{xx} - B_{xx}^0)^2 + (B_{yy} - B_{yy}^0)^2 \right. \\
 \left. + 2(1-\nu)(B_{xy} - B_{xy}^0)^2 \right. \\
 \left. + 2\nu(B_{xx} - B_{xx}^0)(B_{yy} - B_{yy}^0) \right] dx dy
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

zu erhalten.

Die Summe aus der Biegeenergie (2.38), der Dehnungsenergie (2.32) und der potentiellen Energie

$$W_{pot} = \rho g h \iint r_3(x,y) dx dy, \tag{2.39}$$

hier nur durch Eigengewicht mit Dichte ρ und Erdbeschleunigung g erzeugt, ergibt die im Folgenden zu minimierende *Gesamtenergie* W ,

$$W = W_B + W_D + W_{pot}. \tag{2.40}$$

3 Diskretisierung und Implementierung

3.1 Vorbemerkung

Mit Hilfe der soeben hergeleiteten Gesamtenergie

$$\begin{aligned} W &= W_B + W_D + W_{pot} \\ &= \frac{Eh^3}{24(1+\nu^2)} \iint \left[(B_{xx} - B_{xx}^0)^2 + (B_{yy} - B_{yy}^0)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\nu)(B_{xy} - B_{xy}^0)^2 + 2\nu(B_{xx} - B_{xx}^0)(B_{yy} - B_{yy}^0) \right] dx dy \\ &\quad + \frac{Eh}{8(1-\nu^2)} \iint \left[(G_{xx} - G_{xx}^0)^2 + (G_{yy} - G_{yy}^0)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\nu)(G_{xy} - G_{xy}^0)^2 + 2\nu(G_{xx} - G_{xx}^0)(G_{yy} - G_{yy}^0) \right] dx dy \\ &\quad + \rho gh \iint r_3(x,y) dx dy \end{aligned} \tag{3.1}$$

soll nun die Auslenkung einer rechteckigen, elastischen Platte unter Eigengewicht und gewissen Randbedingungen bestimmt werden. Analytisch müsste man diejenige Funktion $r(x,y)$ finden, für die das Funktional $W(r)$ minimal ist, also ein Variationsproblem lösen. Numerisch begnügen wir uns damit, eine diskrete Näherung der Gesamtenergie in Abhängigkeit der Auslenkung an bestimmten Knoten zu betrachten und zu minimieren.

Dabei wird in drei Schritten approximiert. Zunächst werden die Integrale durch Summenformeln angenähert und die Ableitungen durch Finite Differenzen approximiert. Somit kann man also für eine beliebige Lage der Knoten im Raum eine Näherung für die Energie der Platte berechnen. Diese wird mit einem quasi-Newton-Verfahren minimiert, wodurch weitere Approximationsfehler entstehen. Am Ende erwarten wir, dass die so berechnete Lage der Knoten nur leicht von der wahren Lage der Platte abweicht, die sich unter den gegebenen Bedingungen einstellen würde.

Im Folgenden werden wir genauer auf diese Approximationsschritte sowie auf die betrachteten Randbedingungen eingehen.

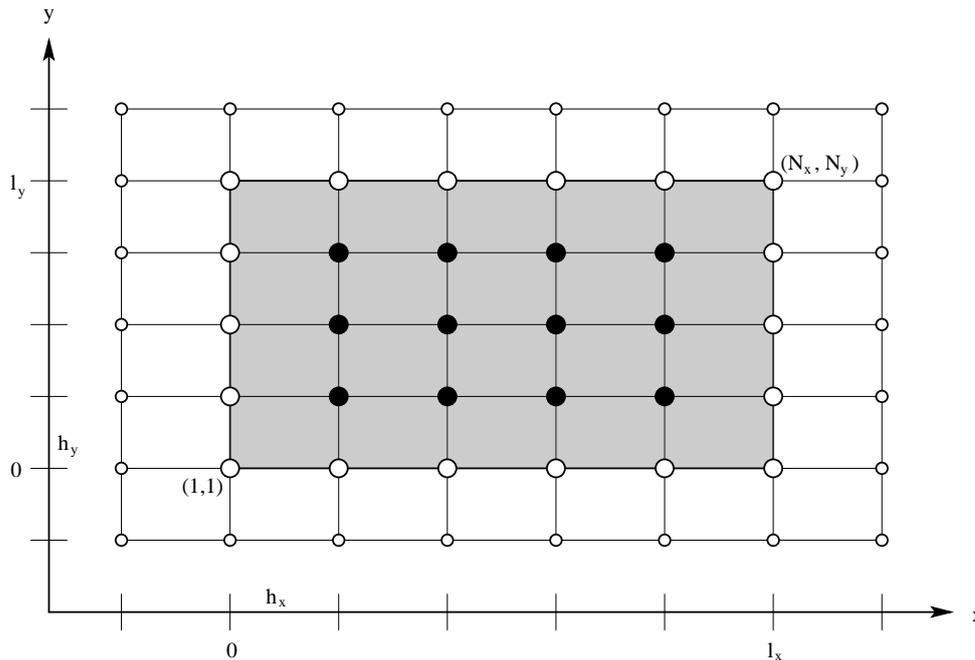


Abbildung 3.1: Knoten und Hilfsknoten

3.2 Diskretisierung

Die Platte und alle damit verbundenen Größen sind durch die Ausgangskonfiguration – also durch ein Rechteck in der Ebene – parametrisiert. Dieses diskretisieren wir nun mit einem jeweils in x- und in y-Richtung äquidistanten Gitter. Dabei seien l_x und l_y die Abmessungen der Platte und N_x, N_y die Anzahl der Knoten in x- bzw. y-Richtung. Daraus ergeben sich die Schrittweiten zu

$$h_x = \frac{l_x}{N_x - 1} \quad \text{und} \quad h_y = \frac{l_y}{N_y - 1}. \quad (3.2)$$

Um verschiedene Randbedingungen ansetzen zu können, legen wir um die Platte herum eine Schicht von Hilfsknoten an (siehe Abb. 3.1). Deren Lage wird dadurch bestimmt, dass für die Finiten Differenzen am Rand die aus den Randbedingungen gegebenen Werte für die entsprechenden partiellen Ableitungen gefordert werden (siehe 3.4 und 3.5). Man erhält also $(N_x + 2)(N_y + 2)$ Knoten

$$(x_i, y_j) = ((i - 1)h_x, (j - 1)h_y) \quad \text{für} \quad 0 \leq i \leq (N_x + 1), 0 \leq j \leq (N_y + 1) \quad (3.3)$$

und damit zunächst $3(N_x + 2)(N_y + 2)$ Variablen für die Lage der Knoten in den drei Raumrichtungen

$$\begin{aligned} R_{ijk} &:= r_k(x_i, y_j), \quad \forall i = 0, \dots, (N_x + 1), \\ &\quad \forall j = 0, \dots, (N_y + 1), \\ &\quad \forall k = 1, \dots, 3. \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.3 Numerische Integration

Da die Integrale in der Energie nicht allgemein gelöst werden können, werden sie durch eine Summenformel angenähert. Auf Grund der rechteckigen Diskretisierung kann die Trapezregel nacheinander in x- und y-Richtung angewendet werden und man erhält die *zweidimensionale Trapezregel*

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy &\stackrel{TR}{\approx} \int_a^b \frac{d-c}{2} (f(x, c) + f(x, d)) dy \\ &\stackrel{TR}{\approx} \frac{1}{4} (b-a)(d-c) (f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Diese wird auf die rechteckigen Elemente im Inneren der Platte angewendet und über alle Elemente summiert. Das ergibt für die einzelnen Integrale Formeln der Form

$$\iint_{Platte} f(x, y) dx dy \approx \frac{h_x h_y}{4} \sum_{i,j=1}^{N_x, N_y} \Omega_{ij} f(x_i, y_j) \tag{3.6}$$

mit

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 4 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

wobei für f die entsprechenden Integranden aus (3.1) einzusetzen sind.

3.4 Finite Differenzen

Um (3.1) diskret approximieren zu können, werden Näherungen für die partiellen Ableitungen von r in den Knoten benötigt. Wir nutzen dazu die zentrale Differenz

$$\frac{\partial r_k(x_i, y_j)}{\partial x} \approx D_x^Z(r_k) = \frac{1}{2h_x} (R_{(i+1)jk} - R_{(i-1)jk}) =: [R_x(i, j)]_k, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial r_k(x_i, y_j)}{\partial y} \approx D_y^Z(r_k) = \frac{1}{2h_y} (R_{i(j+1)k} - R_{i(j-1)k}) =: [R_y(i, j)]_k \quad (3.9)$$

sowie für die zweiten Ableitungen die folgenden Formeln

$$\frac{\partial^2 r_k(x_i, y_j)}{\partial x^2} \approx D_{xx}^2(r_k) = \frac{1}{h_x^2} (R_{(i-1)jk} - 2R_{ijk} + R_{(i+1)jk}) =: [R_{xx}(i, j)]_k, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial^2 r_k(x_i, y_j)}{\partial y^2} \approx D_{yy}^2(r_k) = \frac{1}{h_y^2} (R_{i(j-1)k} - 2R_{ijk} + R_{i(j+1)k}) =: [R_{yy}(i, j)]_k, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r_k(x_i, y_j)}{\partial x \partial y} &\approx D_{xy}^2(r_k) = D_x^Z(D_y^Z(r_k)) = D_y^Z(D_x^Z(r_k)) \\ &= \frac{1}{4h_x h_y} (R_{(i+1)(j+1)k} - R_{(i+1)(j-1)k} - R_{(i-1)(j+1)k} + R_{(i-1)(j-1)k}) \\ &=: [R_{xy}(i, j)]_k = [R_{yx}(i, j)]_k. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Daraus definieren wir analog zu Kapitel 2 die diskreten Versionen von metrischem Tensor

$$\hat{G}(i, j) := \begin{pmatrix} R_x(i, j) \cdot R_x(i, j) & R_x(i, j) \cdot R_y(i, j) \\ R_y(i, j) \cdot R_x(i, j) & R_y(i, j) \cdot R_y(i, j) \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

Normalenvektor

$$\hat{n} := \frac{\hat{N}}{\|\hat{N}\|} := \frac{R_x \times R_y}{\|R_x \times R_y\|} \quad (3.14)$$

sowie Krümmungstensor

$$\hat{B}(i, j) := \begin{pmatrix} \hat{n} \cdot R_{xx}(i, j) & \hat{n} \cdot R_{xy}(i, j) \\ \hat{n} \cdot R_{yx}(i, j) & \hat{n} \cdot R_{yy}(i, j) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

und erhalten unter Verwendung von (3.5) aus (3.1) die diskrete Energie

$$\begin{aligned}
\hat{W}(R) = & \frac{Eh^3h_xh_y}{96(1+\nu^2)} \sum_{i,j=1}^{N_x,N_y} \Omega_{ij} \left[(\hat{B}_{xx}(i,j) - \hat{B}_{xx}^0(i,j))^2 + (\hat{B}_{yy}(i,j) - \hat{B}_{yy}^0(i,j))^2 \right. \\
& + 2(1-\nu)(\hat{B}_{xy}(i,j) - \hat{B}_{xy}^0(i,j))^2 \\
& \left. + 2\nu(\hat{B}_{xx}(i,j) - \hat{B}_{xx}^0(i,j))(\hat{B}_{yy}(i,j) - \hat{B}_{yy}^0(i,j)) \right] \\
& + \frac{Ehh_xh_y}{32(1-\nu^2)} \sum_{i,j=1}^{N_x,N_y} \Omega_{ij} \left[(\hat{G}_{xx}(i,j) - \hat{G}_{xx}^0(i,j))^2 + (\hat{G}_{yy}(i,j) - \hat{G}_{yy}^0(i,j))^2 \right. \\
& + 2(1-\nu)(\hat{G}_{xy}(i,j) - \hat{G}_{xy}^0(i,j))^2 \\
& \left. + 2\nu(\hat{G}_{xx}(i,j) - \hat{G}_{xx}^0(i,j))(\hat{G}_{yy}(i,j) - \hat{G}_{yy}^0(i,j)) \right] \\
& + \rho gh \frac{h_xh_y}{4} \sum_{i,j=1}^{N_x,N_y} \Omega_{ij} R_{ij3}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

3.5 Randbedingungen

3.5.1 Vorbemerkung

Wir sehen drei verschiedene Randbedingungen vor, die beliebig an den vier Rändern angelegt werden können: Eingespannt (B = "built in"), einfach gelagert (S = "simply supported") und frei (F = "free"). Die Randbedingungen sind aus [5] entnommen und auf die drei Raumrichtungen verallgemeinert worden. Wir geben hier nur die Formeln für den Rand $x = 0$ an, an den anderen Rändern sind sie entsprechend. Für die Berechnung gehen wir davon aus, dass die Lage der inneren Knotenpunkte frei – also vorgegeben – ist, und wollen damit die Lage der Rand- und Hilfsknoten aus den Randbedingungen bestimmen.

3.5.2 B – Fest eingespannter Rand

Ist der Rand fest eingespannt, so ist die Lage aller Knoten an diesem Rand fest vorgegeben, ebenso wie die partielle Ableitung senkrecht zur Randlinie

$$r_k(0, y) = f_k(y), \quad (3.17)$$

$$\left. \frac{\partial r_k}{\partial x} \right|_{x=0} = g_k(y). \quad (3.18)$$

In den meisten betrachteten Fällen gelten dabei $f_k \equiv 0$ und $g_k \equiv 0$. Wir fordern dies nun für R , also

$$R_{1jk} = f_k(y_j), \quad (3.19)$$

$$[R_x(1, j)]_k = g_k(y_j). \quad (3.20)$$

Lösen wir nun die zweite Gleichung nach R_{0jk} auf

$$R_{0jk} = R_{2jk} - 2h_x g_k(y_j), \quad (3.21)$$

so können wir die Werte an den Randknoten mit (3.19) und die Werte an den Hilfsknoten mit (3.21) direkt und nacheinander aus der Lage der inneren Knoten berechnen.

3.5.3 S – Einfach gelagerter Rand

Beim einfach gelagerten Rand ist wiederum die Lage der Knoten an diesem Rand vorgegeben. Zusätzlich verschwindet hier das Biegemoment senkrecht zum Rand

$$M_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 r_k}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 r_k}{\partial y^2} \right). \quad (3.22)$$

Wir fordern demnach

$$R_{xx}(1, j) + \nu R_{yy}(1, j) = 0 \quad (3.23)$$

und erhalten durch Auflösen nach R_{0jk} die Randbedingungen

$$R_{1jk} = f_k(y_j), \quad (3.24)$$

$$R_{0jk} = 2R_{1jk} - R_{2jk} - \nu \frac{h_x^2}{h_y^2} \left(R_{1(j-1)k} - 2R_{1jk} + R_{1(j+1)k} \right). \quad (3.25)$$

Auch hier können die Werte in den Rand- und den Hilfsknoten unabhängig voneinander nacheinander berechnet werden.

3.5.4 F – Freier Rand

Am freien Rand kann keine Aussage über die Lage der Knoten gemacht werden. Allerdings verschwinden hier das Biegemoment M_x , das Torsionsmoment

$$M_{xy} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(1-\nu)\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} \quad (3.26)$$

sowie die Scherkraft

$$Q_x = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right). \quad (3.27)$$

Jedoch sind drei Bedingungen zu viele. Anstelle der Forderungen $M_{xy} = 0$ und $Q_x = 0$ muss eine gemeinsame Bedingung an die Scherkraft und die Torsionskraft gestellt werden (siehe [5])

$$V_x := Q_x - \frac{\partial}{\partial y}(M_{xy}) = 0. \quad (3.28)$$

Um dies in Finiten Differenzen darstellen zu können, nutzen wir in x-Richtung die rückwärtige (bzw. am gegenüberliegenden Rand die vorwärtige) Differenz und erhalten die Forderungen

$$R_{xx}(1,j) + \nu R_{yy}(1,j) = 0, \quad (3.29)$$

$$D_x^R (R_{xx}(1,j) + R_{yy}(1,j)) + (1-\nu)D_y^Z (R_{xy}(1,j)) = 0. \quad (3.30)$$

Es ist zu beachten, dass hier die Differenzenoperatoren nicht wie Differentialoperatoren einfach vertauscht werden können.

Anders als bei dem fest eingespannten und dem einfach gelagerten Rand lassen sich diese Gleichungen nicht einfach unabhängig voneinander auflösen. Wir haben statt dessen für jedes k ein lineares Gleichungssystem für alle Rand- und Hilfsknoten des freien Randes. Liegen mehrere freie Ränder nebeneinander, so erhalten wir für diese sogar ein gemeinsames lineares Gleichungssystem.

Um dieses zu lösen ohne auf die Vorteile der Implementierung (siehe 3.7) zu verzichten, müsste ein hoher Programmieraufwand bewältigt werden. Da wir uns hier nur damit beschäftigen, ob die gegebene Herangehensweise mit Energieminimierung und Finiten Differenzen zur Modellierung einer elastischen Platte überhaupt geeignet ist, verzichten wir auf die Bedingung (3.30) und lassen statt dessen die Lage der Randknoten an einem freien Rand ebenfalls frei, können sie also im Folgenden als gegeben voraussetzen. Die Werte an den Hilfsknoten ergeben sich dann wie beim einfach gelagerten Rand unabhängig voneinander aus der Momentenfreiheit (3.25). In Kapitel 4 testen wir a posteriori, ob Bedingung (3.30) vielleicht automatisch in hinreichender Näherung erfüllt wird.

3.6 Zwangsbedingung an den Ecken

Zu jedem Eckknoten gehören drei Hilfsknoten, allerdings gelten hier auch die Randbedingungen von zwei Rändern. Es muss darauf geachtet werden, dass diese konsistent sind. Dies gilt insbesondere, wenn sich zwei eingespannte oder einfach gelagerte Ränder berühren. Die Forderung an die Lage des Eckknotens muss von beiden Rändern her gleich sein. Berühren sich ein freier Rand und ein eingespannter oder einfach gelagerter, so ist hier die Lage des Eckknotens nicht frei, obwohl er auch Randknoten eines freien Randes ist.

Da für die Querkontraktionszahl $-1 < \nu < \frac{1}{2}$ und normalerweise sogar $0 < \nu < \frac{1}{2}$ gilt, ist insbesondere $\nu \neq -1$, so dass sich an einer Ecke zwischen zwei freien oder einfach gelagerten Rändern aus dem Verschwinden der beiden Biegemomente

$$R_{xx}(i, j) + \nu R_{yy}(i, j) = 0, \quad (3.31)$$

$$R_{yy}(i, j) + \nu R_{xx}(i, j) = 0 \quad (3.32)$$

das Verschwinden der zweiten partiellen Ableitungen

$$R_{xx}(i, j) = R_{yy}(i, j) = 0, \quad (3.33)$$

ergibt und hier die Hilfsknoten in x- und y-Richtung einfach linear extrapoliert werden können.

In allen diesen Fällen bleibt jedoch die Lage des Hilfsknotens ganz außen in der Ecke unbestimmt. Selbst mit der gemeinsamen Bedingung (3.30) für das Torsionsmoment und die Scherkraft am freien Rand, bliebe zumindest an den Ecken, an denen sich eingespannte oder einfach gelagerte Ränder treffen, ein Freiheitsgrad pro Raumrichtung frei. Mit einem kleinen Trick kann man jedoch aus der analytischen Lösung eines Teil-Optimierungsproblems zusätzliche Zwangsbedingungen an den Ecken herleiten, so dass die Implementierung einheitlich bleibt und nicht über Hilfsknoten minimiert werden muss.

Die Lage der Eck-Hilfsknoten geht nur über die gemischte zweite partielle Ableitung und somit nur über $(B_{xy} - B_{xy}^0)^2$ in die Gesamtenergie ein. Das heißt, wenn alle anderen Knoten fest sind, wird die diskrete Gesamtenergie minimiert, falls an allen vier Ecken

$$\hat{B}_{xy} = \hat{B}_{xy}^0. \quad (3.34)$$

Um dies zu erreichen, betrachten wir die Vektoren der Komponenten von R_{xy} und R_{xy}^0 . Da die Komponentenvektoren von R_x^0 , R_y^0 und \hat{n}^0 eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden, kön-

nen wir reelle Zahlen a, b und c so wählen, dass

$$R_{xy}^0 = aR_x^0 + bR_y^0 + c\hat{n}^0. \quad (3.35)$$

Falls nun

$$R_{xy} = aR_x + bR_y + c\hat{n}, \quad (3.36)$$

so gilt

$$\begin{aligned} \hat{B}_{xy} &= \langle R_{xy}, \hat{n} \rangle = \langle aR_x + bR_y + c\hat{n}, \hat{n} \rangle \\ &= a \langle R_x, \hat{n} \rangle + b \langle R_y, \hat{n} \rangle + c \langle \hat{n}, \hat{n} \rangle \\ &= a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 1 = c, \end{aligned} \quad (3.37)$$

da \hat{n} laut Definition stets senkrecht auf R_x und R_y steht und außerdem normiert ist. Diese Rechnung gilt äquivalent für \hat{B}_{xy}^0 und somit folgt (3.34).

Man muss also die Lage der Eck-Hilfspunkte so bestimmen, dass an den Ecken der Platte (3.36) gilt, wobei a, b und c aus (3.35) bestimmt werden.

Wir wollen also folgendes nichtlineares Minimierungsproblem lösen

$$\min_{X \in \mathbb{R}^L} \hat{W}(R(X)), \quad (3.38)$$

mit \hat{W} aus (3.16), L der Anzahl der freien Variablen und der Funktion

$$R : \mathbb{R}^L \mapsto \mathbb{R}^{(N_x+2) \times (N_y+2) \times 3}, \quad X \mapsto R(X), \quad (3.39)$$

welche aus den freien Variablen die Lage der Knoten an Hand der Bedingungen aus 3.5 und 3.6 bestimmt.

3.7 Besonderheiten der Implementierung

Die Implementierung des Optimierungsproblems (3.38) erfolgte in MATLAB und C++ um Vorteile beider Programmiersprachen nutzen zu können. Der prinzipielle Aufbau ist in Abbildung 3.2 dargestellt.

Die Optimierung selbst erfolgt dabei mit dem Optimierer `fminunc` aus der Optimization Toolbox in MATLAB (siehe [6]), da auf diese Weise mit geringem Programmieraufwand an die jeweils bereitgestellten Daten (nur Funktionswerte oder

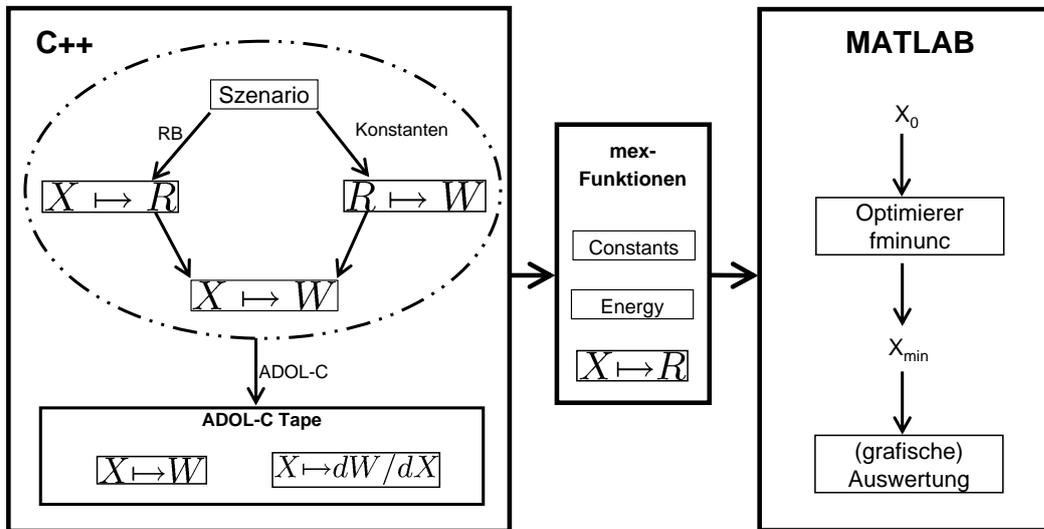


Abbildung 3.2: Aufbau der Implementierung

zusätzlich noch der Gradient) angepasste Algorithmen verwendet werden können. Auch die hauptsächlich grafische Auswertung wird in MATLAB durchgeführt. Die entsprechenden Befehle sind – anders als in C++ – direkt verfügbar.

Dagegen wurde die Energiefunktion $(\hat{W} \circ R) : \mathbb{R}^L \mapsto \mathbb{R}$ für verschiedene Randbedingungen in C++ implementiert. Zum einen erhofften wir uns dadurch eine Laufzeitverbesserung allein aus dem Grund, dass diese Funktion in jedem Iterationsschritt mindestens einmal aufgerufen wird, zum Anderen konnten wir dadurch mit ADOL-C (siehe [7,8]), ohne komplizierte händische Ableitungen bilden zu müssen, einen algebraisch korrekten Gradienten an den Optimierer liefern. Dabei werden in einem ersten Durchlauf durch das Programm mit der Kettenregel alle Berechnungsschritte nacheinander differenziert und das differenzierte Programm in einem "Tape" gespeichert. Da auf dieses Tape jedoch nur zur Laufzeit zugegriffen werden kann, muss es in jedem Iterationsschritt neu erstellt werden. Erste Tests zeigten dennoch, dass dies wesentlich schneller und stabiler war als eine Variante, bei welcher der Optimierer den Gradienten selbst als Finite-Differenzen-Näherung bestimmen sollte.

Der Aufruf von C++ unter MATLAB erfolgt mittels so genannter mex-Funktionen (siehe [9]). Diesen werden Pointer auf die Ein- und Ausgabevariablen in MATLAB übergeben. Mit solchen mex-Funktionen erhält MATLAB den Startvektor für die Optimierung, in jedem Iterationsschritt den Funktionswert und den Gradienten der

Energiefunktion, am Ende die R_{ijk} sowie weitere Konstanten und Parameter, die entweder für die Optimierung oder die Auswertung benötigt werden.

Ein Aufruf von MATLAB unter C++ ist ebenfalls möglich. Hierfür gibt es die MATLAB Engine (siehe [10]). Der Versuch, auf diese Weise das Gleichungssystem zu lösen, welches unter Beachtung der Bedingung (3.30) am freien Rand entstanden wäre, war jedoch nicht erfolgreich. ADOL-C hat offensichtlich Probleme damit, wenn die Variablen außerhalb von C++ verändert werden. Die Berechnung und Übergabe einer inversen Matrix führten ebenfalls zu seltsamen Ergebnissen. Die Optimierung endete nach einigen Iterationen, ohne dass die Variablen merklich verändert worden wären. Wahrscheinlich lieferte ADOL-C in diesem Fall einen fehlerhaften Gradienten nahe Null. Aus diesem Grund haben wir auf die MATLAB Engine und letztlich auch auf die Forderung nach Bedingung (3.30) verzichtet.

4 Beispiele und Auswertung

4.1 Allgemeine Parameter

Um das Modell und die Implementierung zu testen, haben wir das Programm für eine quadratische Platte

$$l_x = l_y = 1\text{m}, \quad h = 10^{-3}\text{m} \quad (4.1)$$

unter verschiedenen Randbedingungen und jeweils mit den Materialparametern für Stahl

$$E_{\text{Stahl}} = 2.04 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \quad \rho_{\text{Stahl}} = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad \nu_{\text{Stahl}} = 0.2 \quad (4.2)$$

und Gummi

$$E_{\text{Gummi}} = 5 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \quad \rho_{\text{Gummi}} = 1100 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad \nu_{\text{Gummi}} = 0.5 \quad (4.3)$$

berechnet. Die Diskretisierung erfolgte dabei mit $N_x = N_y = 6$. Es musste also über jeweils 75 bis 90 Variablen minimiert werden. Dem Optimierer `fminunc` der Optimization Toolbox in MATLAB wurden die Parameter laut Tabelle 4.1 übergeben, ansonsten wurden die Standard-Einstellungen gelassen (siehe [6]). Als Startwert wurde dasjenige X übergeben, welches der ebenen undeformierten Platte entspricht. Sofern nicht anders angegeben gelten diese Parameter und Einstellungen für alle folgenden Beispiele.

| Parameter | Wert | Beschreibung |
|------------|------|--|
| LargeScale | 'on' | von Zielfunktion übergebener Gradient wird benutzt |
| GradObj | 'on' | |
| MaxIter | 100 | maximale Anzahl Iterationen |
| TolFun | 1e-9 | Abbruch-Toleranz des Funktionswerts |
| TolX | 1e-9 | Abbruch-Toleranz von X |

Tabelle 4.1: Parameter für `fminunc`

4.2 Erste Beispiele

Zunächst haben wir eine in der Ebene auf unterschiedliche Arten eingespannte bzw. gelagerte Platte betrachtet. Der RB-Code gibt die Art der Randbedingungen (siehe 3.5) reihum an. So steht zum Beispiel "SFSF" für eine an zwei gegenüberliegenden Seiten einfach gelagerte Platte, "BFFF" für eine an einer Seite fest eingespannte Platte. Die meisten möglichen Kombinationen von Randbedingungen – bis auf Symmetrie - wurden jeweils mit den Gummi- und Stahlparametern getestet. Die Beurteilung der Ergebnisse erfolgte dabei zunächst nach Plausibilität der grafischen Ausgabe (siehe Abbildungen 4.1-4.11). Dabei wurde die Platte mitsamt der Hilfsknoten ausgegeben um das Verhalten der Ableitungen erkennen zu können. So sieht man beispielsweise in Abbildung 4.6 sehr schön, wie sich die Momentenfreiheit auf die zweiten partiellen Ableitungen und damit auf die Biegung der Platte am freien Rand auswirkt.

Zudem sind für jeden Fall die Anzahl der benötigten Iterationen, das eingetretene Abbruchkriterium, die Laufzeit sowie das Maximum der Verschiebung über alle Knoten in Tabelle 4.2 angegeben. Bei der Laufzeit ist zu beachten, dass diese auf Grund unterschiedlich starker Belastungen des Servers, auf dem die Berechnungen durchgeführt wurden, Schwankungen unterliegen und somit nur ungefähre Aussagen über die Geschwindigkeit des Programms gemacht werden können. Dennoch zeigt sich leider, dass wir von Echtzeit-Fähigkeit noch weit entfernt sind.

Offensichtlich ist die Stabilität des Programms stark parameterabhängig. Für Stahl wurden durchgehend gute Ergebnisse erzielt. Man erhält hier fast überall eine plausible "glatte" Fläche, während bei Gummi häufig "Zickzack" auftritt. Die Beispiele SSFF (Abb. 4.8(b)), SFFF (Abb. 4.10(b)) und BFFF (Abb. 4.11(b)) sind für Stahl zwar nicht in der gegebenen Anzahl Iterationen beendet worden, aber auch sie verhalten sich gutmütig hinsichtlich der Stabilität und man kann nach weiteren Iterationen ein zufriedenstellendes Ergebnis erwarten. Auf Grund der langen Laufzeiten konnten diese Beispiele jedoch nicht zu Ende gerechnet werden. So reichten zum Beispiel für SFFF und BFFF mit Stahlparametern auch 1000 Iterationen in 47 Minuten bzw. 3 Stunden nicht aus um die gewünschte Genauigkeit zu erzielen.

Auffällig ist ebenfalls, dass der Zickzack fast nur bei zumindest teilweise fest eingespannten Platten auftritt. Offensichtlich spielt also auch die Art der Randbedingungen, die ja direkt in die Energiefunktion einprogrammiert ist, eine große Rolle für die numerische Stabilität. Das einzige einfach gelagerte Beispiel mit Zickzack ist SFFF (Abb. 4.10(a)), allerdings ist bei diesem Beispiel der Startpunkt für die Optimierung vergleichsweise schlecht, womit sich die Wellen im unteren Bereich viel-

leicht auch schon erklären lassen. Ignoriert man zudem die Lage der Hilfsknoten, so ist die Abweichung von der theoretischen Lösung, einer eben herunterhängenden, leicht gedehnten Platte, schon wesentlich kleiner.

Eine weitere Beobachtung kann man bei SSSS (Abb. 4.1) sowie SSSF (Abb. 4.4) machen. An den Ecken, an denen sich zwei einfach gelagerte Ränder berühren, sind die Eck-Hilfsknoten viel weiter ausgelenkt, als die anderen Hilfsknoten. Es entstehen spitze abstehende Ecken. Dieses Verhalten erinnert an Effekte wie konzentrierte Reaktionskräfte in den Ecken, die bei Berechnungen der Kirchhoff-Platte mittels der Methode der Finiten Elemente auftreten können. In der FEM wird deshalb meist das Mindlin-Reissner-Modell verwendet, welches zusätzlich die Scherung berücksichtigt (siehe z. B. [11–13]). Dies ist also bereits ein Problem des Modells "Kirchhoffplatte" unabhängig von der Diskretisierung.

| Nr | RB-Code | Material | Iter. | Abbruch | Laufzeit/s | Versch./mm |
|---------|---------|----------|-------|---------|------------------------|------------|
| 4.1(a) | SSSS | Gummi | 12 | TolFun | 8.9 | 30.9 |
| 4.1(b) | SSSS | Stahl | 9 | TolFun | 6.9 | 2.0 |
| 4.2(a) | BBBB | Gummi | 9 | TolFun | 2.9 | 63.1 |
| 4.2(b) | BBBB | Stahl | 7 | TolFun | 2.3 | 2.5 |
| 4.3(a) | BSBS | Gummi | 10 | TolFun | 5.6 | 37.3 |
| 4.3(b) | BSBS | Stahl | 6 | TolFun | 3.4 | 2.2 |
| 4.4(a) | SSSF | Gummi | 14 | TolFun | 16.0 | 47.7 |
| 4.4(b) | SSSF | Stahl | 8 | TolFun | 9.7 | 2.7 |
| 4.5(a) | BBBF | Gummi | 35 | TolFun | 22.3 | 340.1 |
| 4.5(b) | BBBF | Stahl | 12 | TolFun | 8.1 | 5.8 |
| 4.6(a) | SFSF | Gummi | 13 | TolFun | 23.8 | 46.5 |
| 4.6(b) | SFSF | Stahl | 10 | TolFun | 18.8 | 2.7 |
| 4.7(a) | BFBF | Gummi | 17 | TolFun | 22.0 | 276.2 |
| 4.7(b) | BFBF | Stahl | 29 | TolFun | 10.8 | 35.4 |
| 4.8(a) | SSFF | Gummi | 33 | TolFun | 60.4 | 391.3 |
| 4.8(b) | SSFF | Stahl | 101 | MaxIter | 180.7 | 43.5 |
| 4.9(a) | BBFF | Gummi | 70 | TolFun | 94.6 | 679.9 |
| 4.9(b) | BBFF | Stahl | 64 | TolFun | 87.0 | 18.2 |
| 4.10(a) | SFFF | Gummi | 72 | TolFun | 206 (≈ 3 min) | 1001.0 |
| 4.10(b) | SFFF | Stahl | 101 | MaxIter | 287 (≈ 5 min) | 147.4 |
| 4.11(a) | BFFF | Gummi | 101 | MaxIter | 249 (≈ 4 min) | 1067.9 |
| 4.11(b) | BFFF | Stahl | 101 | MaxIter | 249 (≈ 4 min) | 127.2 |

Tabelle 4.2: Erste Beispiele – Ergebnisse

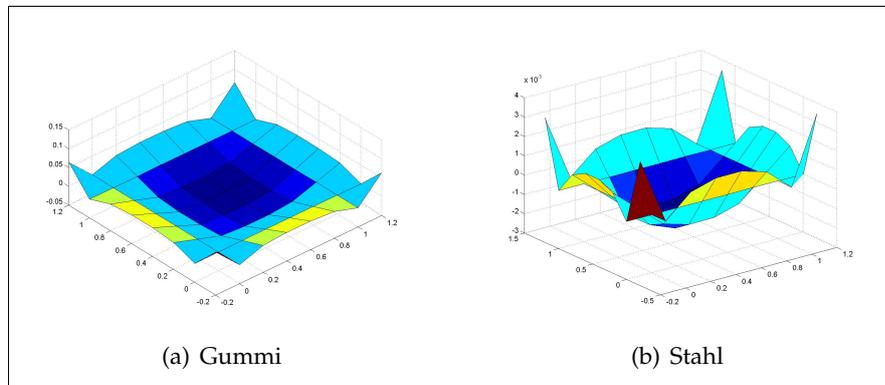


Abbildung 4.1: Platte mit Randbedingungen SSSS

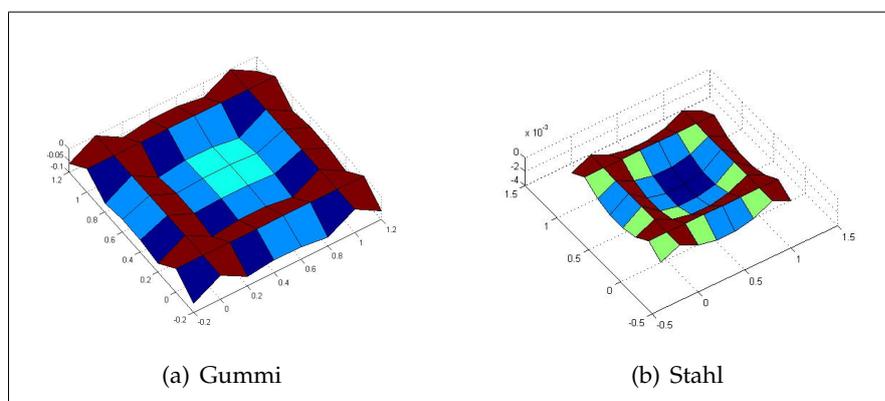


Abbildung 4.2: Platte mit Randbedingungen BBBB

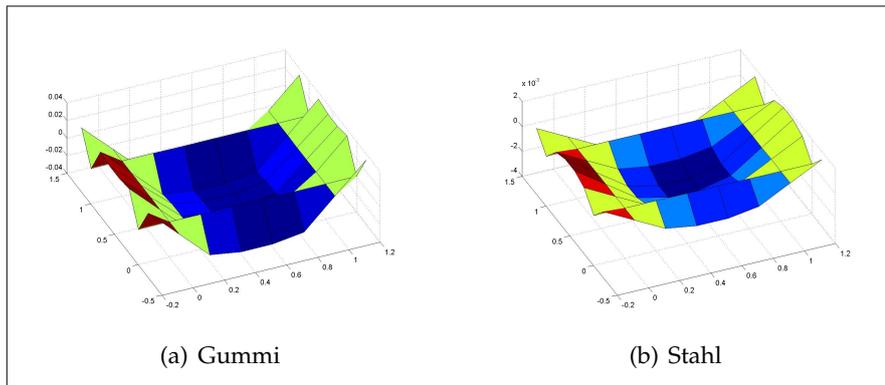


Abbildung 4.3: Platte mit Randbedingungen BSBS

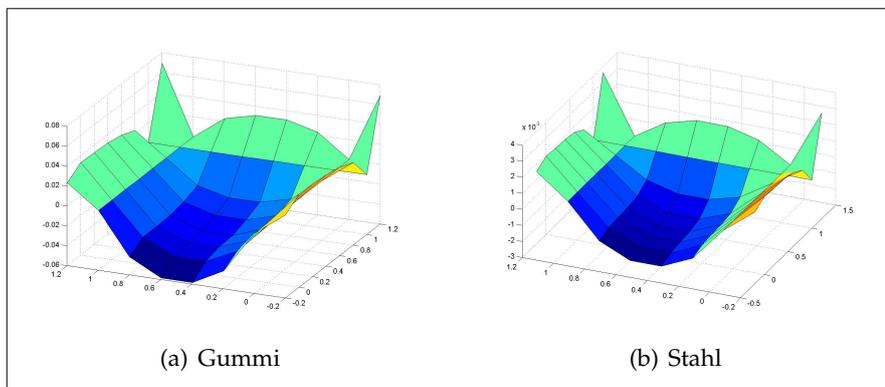


Abbildung 4.4: Platte mit Randbedingungen SSSF

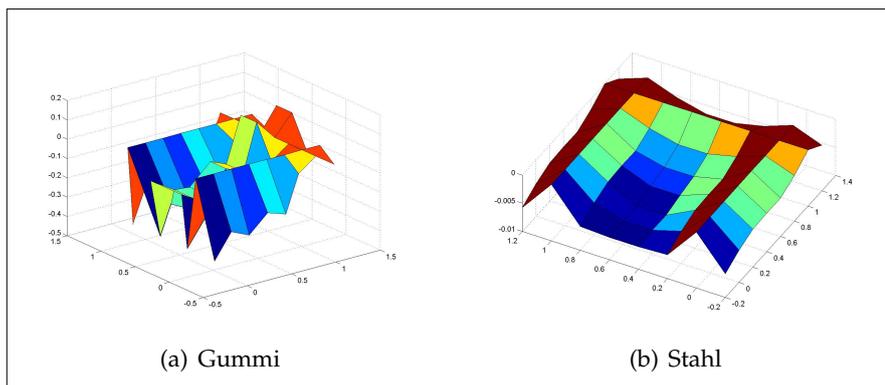


Abbildung 4.5: Platte mit Randbedingungen BBBF

4 BEISPIELE UND AUSWERTUNG

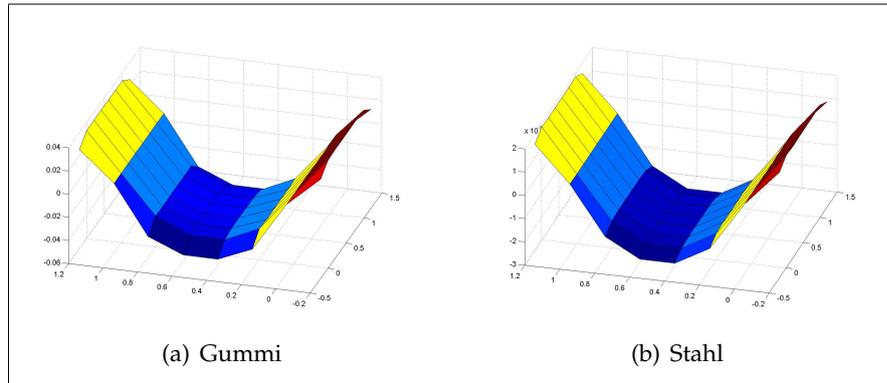


Abbildung 4.6: Platte mit Randbedingungen SFSF

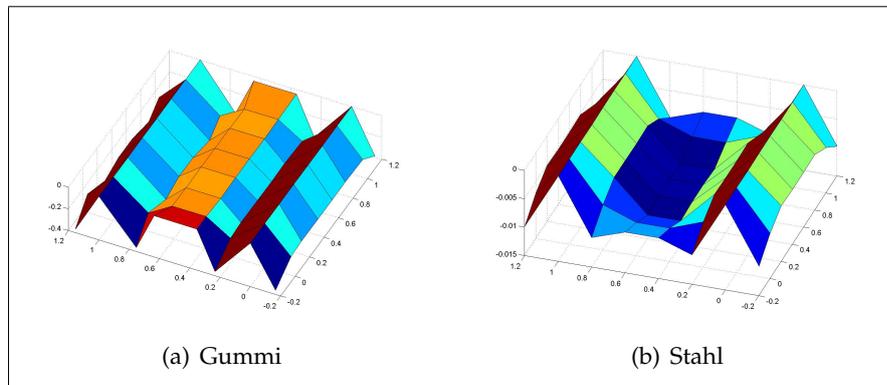


Abbildung 4.7: Platte mit Randbedingungen BFBF

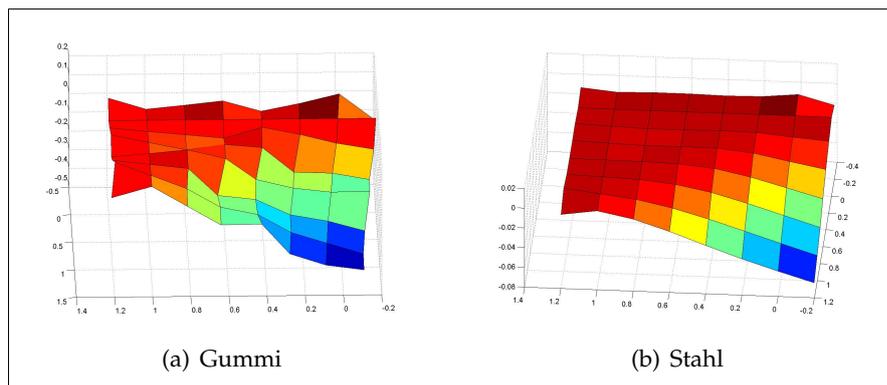


Abbildung 4.8: Platte mit Randbedingungen SSFF

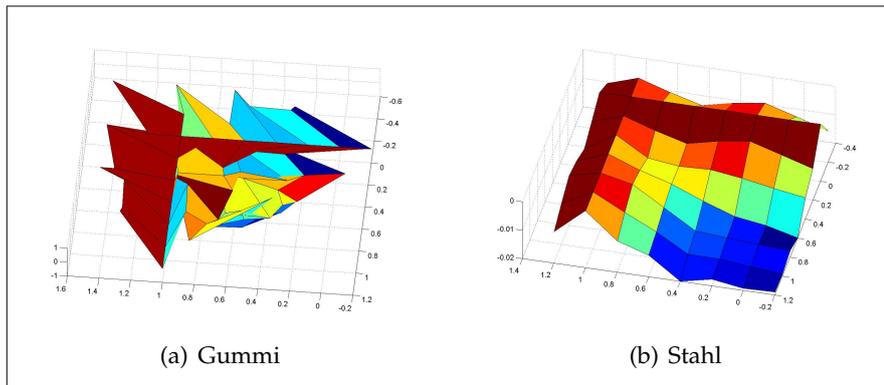


Abbildung 4.9: Platte mit Randbedingungen BBFF

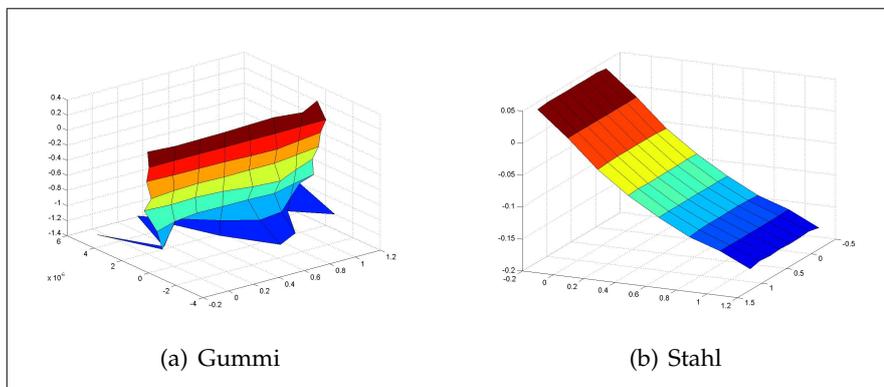


Abbildung 4.10: Platte mit Randbedingungen SFFF

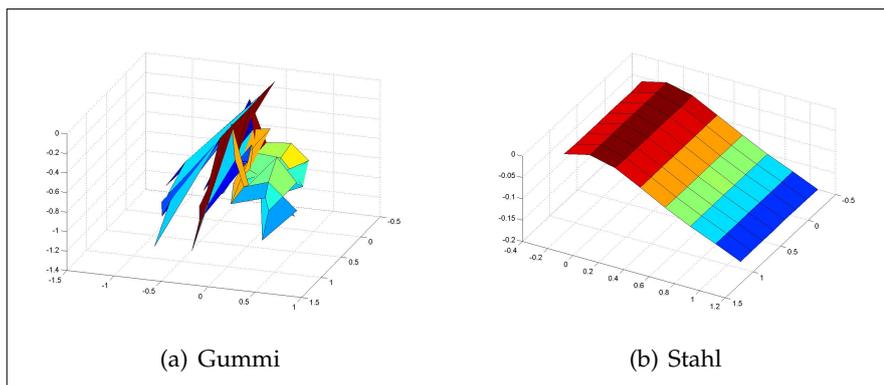


Abbildung 4.11: Platte mit Randbedingungen BFFF

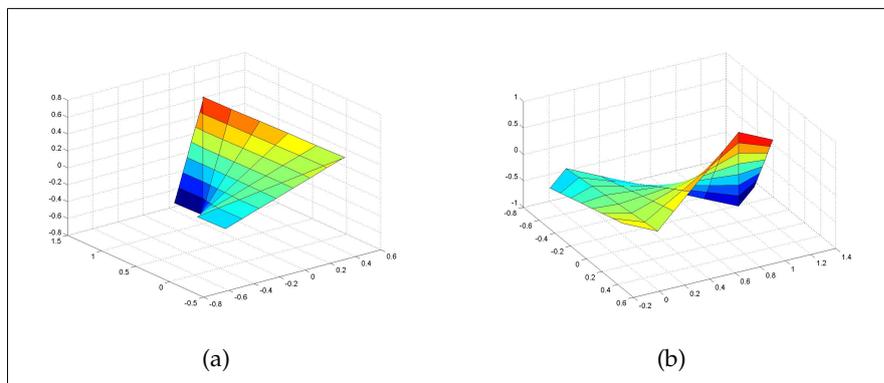


Abbildung 4.12: Verdreht eingespannte Platte – Startkonfiguration

4.3 Verdrehte Platte

Da wir mit diesem Programm insbesondere auch große Deformationen betrachten wollen, haben wir noch zwei weitere Szenarien implementiert. Dabei wird die Platte an zwei gegenüberliegenden Seiten eingespannt bzw. einfach gelagert, so dass die Ränder um 90° zueinander verdreht sind. Da in diesem Fall die Platte sehr stark gedehnt wird, was normalerweise nur bei Membranen vorkommt, sind wir hier von einer Plattenstärke $h = 10^{-6}\text{m}$ ausgegangen. Außerdem benutzen wir eine bereits verdrehte Startkonfiguration der Platte für die Optimierung, welche in Abbildung 4.12 für die eingespannte und in Abbildung 4.14 für die einfach gelagerte Platte dargestellt ist.

Die Ergebnisse dieser Tests sind in den Abbildungen 4.13 und 4.15 sowie Tabelle 4.3 zusammengetragen.

Obwohl alle vier Beispiele mit `TolFun` endeten, sind die Ergebnisse nicht wirklich zufriedenstellend. Erneut zeigt sich, dass die Randbedingungen für eingespannte Ränder große Probleme mit der Stabilität machen, aber auch bei den einfach gelagerten Rändern sehen die Knoten eher verwackelt aus. Erneut zeigt sich, dass die Stabilität der Optimierung das große Problem unseres Modells ist. Vermutlich kann man in dieser Hinsicht durch Vorkonditionierung oder die Wahl eines anderen Optimierungsalgorithmus noch eine Verbesserung erreichen, wir haben uns aber nicht weiter mit dieser Thematik beschäftigt.

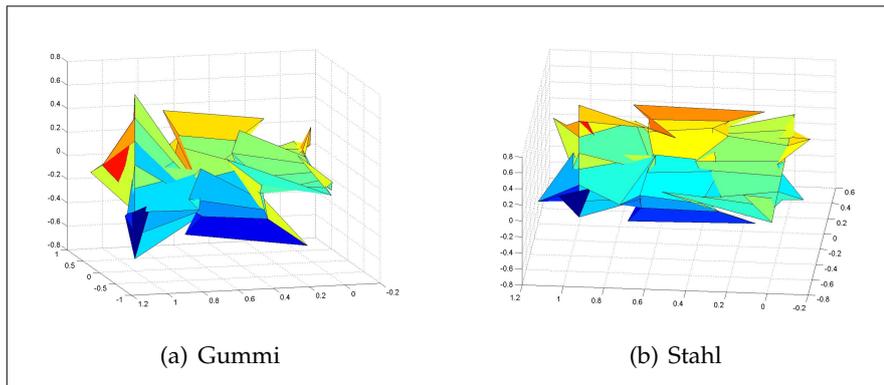


Abbildung 4.13: Verdreht eingespannte Platte – Ergebnis

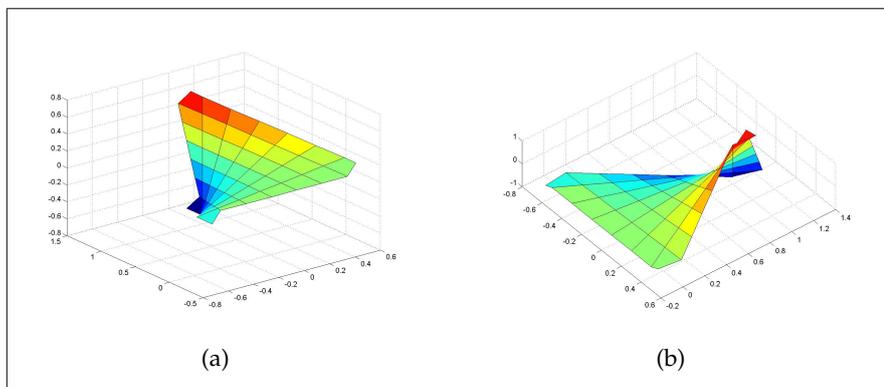


Abbildung 4.14: Verdreht gelagerte Platte – Startkonfiguration

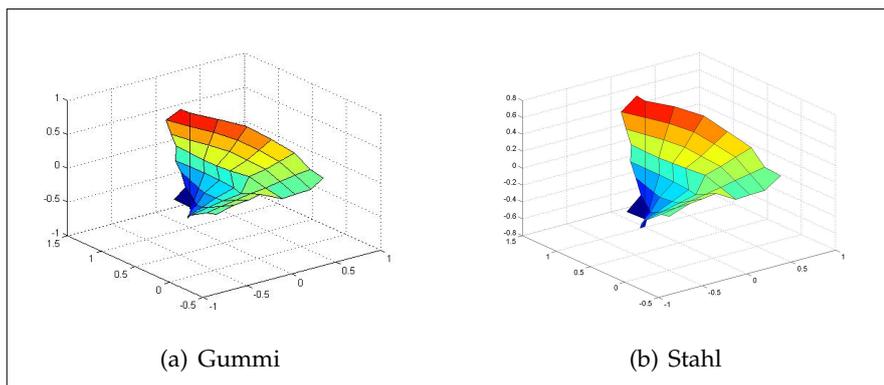


Abbildung 4.15: Verdreht gelagerte Platte – Ergebnis

| Randbedingungen | Material | Iter. | Zeit/s |
|------------------|----------|-------|--------|
| Eingespannt | Gummi | 58 | 69.7 |
| Eingespannt | Stahl | 36 | 45.3 |
| Einfach gelagert | Gummi | 17 | 31.0 |
| Einfach gelagert | Stahl | 21 | 37.4 |

Tabelle 4.3: Verdrehte Platte – Ergebnisse

4.4 A posteriori-Test der Randbedingungen am freien Rand

In 3.5.4 haben wir die Randbedingungen am freien Rand vereinfacht, indem wir auf die Forderung nach Bedingung (3.30) verzichtet und statt dessen zusätzliche freie Variablen eingeführt haben. Nun wollen wir testen, ob diese Bedingung trotzdem näherungsweise erfüllt wird. Wir betrachten dazu alle Beispiele aus 4.2 mit mindestens einem freien Rand und gutem grafischen Ergebnis. Wir berechnen an jedem Randknoten

$$\begin{aligned}
\hat{V}_x &:= \hat{Q}_x - D_y^Z(\hat{M}_{xy}) \\
&:= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} D_x^{V,R} \left(D_{xx}^2(R) + D_{yy}^2(R) \right) \\
&\quad - D_y^Z \left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) D_{xy}^2(R) \right) \quad \text{für } x \equiv \text{const.}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

bzw. analog

$$\hat{V}_y := \hat{Q}_y - D_x^Z(\hat{M}_{yx}) \quad \text{für } y \equiv \text{const.} \tag{4.5}$$

und vergleichen die Werte in z-Richtung, also senkrecht zur undeformierten Lage, an den freien Rändern mit denen an den anderen Rändern. Sollte das Maximum

$$\hat{V}_{\max}^F := \max\{\hat{V}_x(i,j,3) \text{ bzw. } \hat{V}_y(i,j,3) \mid (i,j) \text{ Knoten an freiem Rand}\} \tag{4.6}$$

von \hat{V}_x bzw. \hat{V}_y über den freien Rand wesentlich kleiner sein als das Maximum

$$\hat{V}_{\max}^{B,S} := \max\{\hat{V}_x(i,j,3) \text{ bzw. } \hat{V}_y(i,j,3) \mid (i,j) \text{ Knoten an eingespanntem oder gelagertem Rand}\} \tag{4.7}$$

von \hat{V}_x bzw. \hat{V}_y über die anderen Ränder, so können wir Bedingung (3.30) als automatisch erfüllt betrachten.

Für unsere Beispiele ergaben sich die Werte in Tabelle 4.4, unsere Hoffnung hat sich also nicht erfüllt. Statt dessen wird in Beispiel SSFF \hat{V}_{\max}^F sogar größer als $\hat{V}_{\max}^{B,S}$. Man muss demnach das Programm noch um eine Implementierung der Bedingung (3.30) am freien Rand erweitern.

| Nr | RB-Code | Material | \hat{V}_{\max}^F | $\hat{V}_{\max}^{B,S}$ | $\hat{V}_{\max}^F / \hat{V}_{\max}^{B,S}$ |
|----|---------|----------|----------------------|------------------------|---|
| 1 | BBBF | Stahl | 3.05 | 11.79 | 0.26 |
| 2 | BFFF | Stahl | 6.38 | 25.03 | 0.26 |
| 3 | SFSF | Gummi | $4.79 \cdot 10^{-4}$ | $8.20 \cdot 10^{-4}$ | 0.58 |
| 4 | SFSF | Stahl | 0.16 | 1.10 | 0.15 |
| 5 | SSFF | Stahl | 6.95 | 5.66 | 1.23 |
| 6 | SSSF | Gummi | $4.72 \cdot 10^{-4}$ | $1.00 \cdot 10^{-3}$ | 0.47 |
| 7 | SSSF | Stahl | 0.18 | 2.70 | 0.07 |

Tabelle 4.4: Ergebnisse für die RB am freien Rand

4.5 Validierung

Um die Ergebnisse unserer Berechnungen zu validieren vergleichen wir sie für ausgewählte Beispiele mit den Ergebnissen anderer Modelle, die in der Strukturmechanik verwendet werden. So existieren unter anderem für die Beispiele SSSS, BSBS und BBBB laut [5] analytische Lösungen für das lineare Kirchhoffmodell, also für im Vergleich zur Plattenstärke kleine Deformationen. Für die maximale Auslenkung in der Mitte der Platte senkrecht zur Ausgangslage ergeben sich daraus für SSSS folgende Formeln

$$r_3(x,y) = \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^4 E h^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{l_x^2} + \frac{n^2}{l_y^2}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right) \right] \quad (4.8)$$

$$\text{mit } a_{mn} = \begin{cases} \frac{16\rho g h}{\pi^2 m n} & \text{für } m, n \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.9)$$

Für $l_x = l_y = l$ folgt daraus

$$\begin{aligned} \max_{(x,y) \in [0,l]^2} r_3(x,y) &= \frac{192(1-\nu^2)\rho g l^4}{\pi^6 E h^2} \sum_{m \text{ ungerade}} \sum_{n \text{ ungerade}} \left[\frac{(-1)^{\left(\frac{m+n}{2}-1\right)}}{m n (m^2 + n^2)^2} \right] \\ &\approx 0.0487 \frac{(1-\nu^2)\rho g l^4}{E h^2} =: R_{\max}^T \quad \text{für SSSS.} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Mit ähnlichen Überlegungen werden in [5] die Abschätzungen

$$\max_{(x,y) \in [0,l]^2} r_3(x,y) \approx R_{\max}^T := 0.0230 \frac{(1-\nu^2)\rho g l^4}{Eh^2} \quad \text{für BSBS und} \quad (4.11)$$

$$\max_{(x,y) \in [0,l]^2} r_3(x,y) \approx R_{\max}^T := 0.0151 \frac{(1-\nu^2)\rho g l^4}{Eh^2} \quad \text{für BBBB} \quad (4.12)$$

hergeleitet.

Desweiteren haben wir die Platte mit den gegebenen Randbedingungen auch mit dem Strukturmechanik-Paket aus FEMLAB Multiphysics (siehe [14]) mit dem (linearen) Modell der "Mindlin Plate" und den Standard-Einstellungen (z. B. für die Feinheit des Gitters) berechnet. Die so erhaltenen Werte für R_{\max}^F stimmen gut mit den Werten überein, die man aus (4.10)-(4.12) erhält. Versuche, die Platte als 3D-Objekt mit FEMLAB auch für große Deformationen zu berechnen, scheiterten an mangelndem Speicherplatz. Da die Platte in eine Richtung sehr dünn ist, musste ein sehr feines Gitter gewählt werden, wodurch die Anzahl der Variablen zu groß wurde.

Da sowohl mit Gummi- als auch mit Stahlparametern die Auslenkung nach keiner der drei Berechnungsarten, mit (4.10)-(4.12), FEMLAB sowie dem eigenen Programm, klein im Vergleich zur Plattenstärke war und damit die Werte von R_{\max}^T und R_{\max}^F nicht vertrauenswürdig waren, haben wir alle diese Beispiele mit um mehrere Zehnerpotenzen kleineren Dichten berechnet um die Auslenkung zu verringern und die verschiedenen Modelle vergleichen zu können.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 4.5 zusammengetragen. Man sieht sofort, wo die Probleme der linearen Modelle für große Auslenkungen (erzeugt durch eine "große" Last) liegen. Die Auslenkungen für z. B. Nr. 2, 11 und 18 werden mit 27m bis 82m für eine Platte der Größe $1\text{m} \times 1\text{m}$ weit überschätzt. Auslenkungen von einigen wenigen Zentimetern, wie unser Programm sie liefert, sind da weit plausibler.

Für kleinere Lasten gleichen sich die Ergebnisse des Programms und der linearen Modelle zumindest in der Größenordnung schnell an. Ein Faktor von ungefähr 2 ist auf Grund der groben Diskretisierung sowie der Tatsache, dass die linearen Modelle auch nicht exakt rechnen können, durchaus noch vertretbar. Demnach können die Ergebnisse unseres Programms zumindest für solche Beispiele, bei denen keine Probleme mit der Stabilität auftreten, guten Gewissens verwendet werden.

| Nr | RB-Code | E | ν | ρ | R_{\max}^P | R_{\max}^T | R_{\max}^F | R_{\max}^P/R_{\max}^T |
|----|---------|-----------------------|-------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-------------------------|
| 1 | SSSS | $2.04 \cdot 10^{+11}$ | 0.2 | $7.85 \cdot 10^{+3}$ | $2.00 \cdot 10^{-3}$ | $1.77 \cdot 10^{-2}$ | $1.73 \cdot 10^{-2}$ | 0.1132 |
| 2 | SSSS | $2.04 \cdot 10^{+11}$ | 0.2 | $7.85 \cdot 10^{+0}$ | $2.09 \cdot 10^{-5}$ | $1.77 \cdot 10^{-5}$ | $1.73 \cdot 10^{-5}$ | 1.1848 |
| 3 | SSSS | $2.04 \cdot 10^{+11}$ | 0.2 | $7.85 \cdot 10^{-2}$ | $2.09 \cdot 10^{-7}$ | $1.77 \cdot 10^{-7}$ | $1.73 \cdot 10^{-7}$ | 1.1855 |
| 4 | SSSS | $5.00 \cdot 10^{+06}$ | 0.5 | $1.10 \cdot 10^{+3}$ | $3.09 \cdot 10^{-2}$ | $7.89 \cdot 10^{+1}$ | $8.22 \cdot 10^{+1}$ | 0.0004 |
| 5 | SSSS | $5.00 \cdot 10^{+06}$ | 0.5 | $1.10 \cdot 10^{+0}$ | $3.40 \cdot 10^{-3}$ | $7.89 \cdot 10^{-2}$ | $8.22 \cdot 10^{-2}$ | 0.0431 |
| 6 | SSSS | $5.00 \cdot 10^{+06}$ | 0.5 | $1.10 \cdot 10^{-2}$ | $6.57 \cdot 10^{-4}$ | $7.89 \cdot 10^{-4}$ | $8.22 \cdot 10^{-4}$ | 0.8324 |
| 7 | SSSS | $5.00 \cdot 10^{+06}$ | 0.5 | $1.10 \cdot 10^{-5}$ | $1.39 \cdot 10^{-6}$ | $7.89 \cdot 10^{-7}$ | $8.22 \cdot 10^{-7}$ | 1.7581 |
| 8 | BSBS | $2.04 \cdot 10^{+11}$ | 0.2 | $7.85 \cdot 10^{+3}$ | $2.20 \cdot 10^{-3}$ | $8.35 \cdot 10^{-3}$ | $8.49 \cdot 10^{-3}$ | 0.2635 |
| 9 | BSBS | $2.04 \cdot 10^{+11}$ | 0.2 | $7.85 \cdot 10^{+0}$ | $1.12 \cdot 10^{-5}$ | $8.35 \cdot 10^{-6}$ | $8.49 \cdot 10^{-6}$ | 1.3397 |
| 10 | BSBS | $2.04 \cdot 10^{+11}$ | 0.2 | $7.85 \cdot 10^{-2}$ | $1.12 \cdot 10^{-7}$ | $8.35 \cdot 10^{-8}$ | $8.49 \cdot 10^{-8}$ | 1.3397 |
| 11 | BSBS | $5.00 \cdot 10^{+06}$ | 0.5 | $1.10 \cdot 10^{+3}$ | $3.73 \cdot 10^{-2}$ | $3.73 \cdot 10^{+1}$ | $4.04 \cdot 10^{+1}$ | 0.0010 |
| 12 | BSBS | $5.00 \cdot 10^{+06}$ | 0.5 | $1.10 \cdot 10^{+0}$ | $3.90 \cdot 10^{-3}$ | $3.73 \cdot 10^{-2}$ | $4.04 \cdot 10^{-2}$ | 0.1046 |
| 13 | BSBS | $5.00 \cdot 10^{+06}$ | 0.5 | $1.10 \cdot 10^{-2}$ | $5.76 \cdot 10^{-4}$ | $3.73 \cdot 10^{-4}$ | $4.04 \cdot 10^{-4}$ | 1.5447 |
| 14 | BSBS | $5.00 \cdot 10^{+06}$ | 0.5 | $1.10 \cdot 10^{-5}$ | $7.47 \cdot 10^{-7}$ | $3.73 \cdot 10^{-7}$ | $4.04 \cdot 10^{-7}$ | 2.0025 |
| 15 | BBBB | $2.04 \cdot 10^{+11}$ | 0.2 | $7.85 \cdot 10^{+3}$ | $2.50 \cdot 10^{-3}$ | $5.48 \cdot 10^{-3}$ | $5.77 \cdot 10^{-3}$ | 0.4563 |
| 16 | BBBB | $2.04 \cdot 10^{+11}$ | 0.2 | $7.85 \cdot 10^{+0}$ | $7.85 \cdot 10^{-6}$ | $5.48 \cdot 10^{-6}$ | $5.77 \cdot 10^{-6}$ | 1.4321 |
| 17 | BBBB | $2.04 \cdot 10^{+11}$ | 0.2 | $7.85 \cdot 10^{-2}$ | $7.85 \cdot 10^{-8}$ | $5.48 \cdot 10^{-8}$ | $5.77 \cdot 10^{-8}$ | 1.4321 |
| 18 | BBBB | $5.00 \cdot 10^{+06}$ | 0.5 | $1.10 \cdot 10^{+3}$ | $6.31 \cdot 10^{-2}$ | $2.45 \cdot 10^{+1}$ | $2.75 \cdot 10^{+1}$ | 0.0026 |
| 19 | BBBB | $5.00 \cdot 10^{+06}$ | 0.5 | $1.10 \cdot 10^{+0}$ | $5.30 \cdot 10^{-3}$ | $2.45 \cdot 10^{-2}$ | $2.75 \cdot 10^{-2}$ | 0.2166 |
| 20 | BBBB | $5.00 \cdot 10^{+06}$ | 0.5 | $1.10 \cdot 10^{-2}$ | $4.79 \cdot 10^{-4}$ | $2.45 \cdot 10^{-4}$ | $2.75 \cdot 10^{-4}$ | 1.9556 |
| 21 | BBBB | $5.00 \cdot 10^{+06}$ | 0.5 | $1.10 \cdot 10^{-5}$ | $5.22 \cdot 10^{-7}$ | $2.45 \cdot 10^{-7}$ | $2.75 \cdot 10^{-7}$ | 2.1346 |

Tabelle 4.5: Ergebnisse der Validierung

5 Ausblick

Dieses Praktikum war nur ein erster Schritt in Richtung Modellierung von elastischen 2D-Objekten in Echtzeit. Es wären noch viele weitere Tests und auch analytische Betrachtungen nötig, um das Verhalten der Implementierung hinsichtlich Stabilität und Genauigkeit der Ergebnisse zu untersuchen und möglicherweise zu verbessern. Auch wären Vergleiche der Ergebnisse mit real existierenden Platten interessant um das Modell zu validieren. Für all dies reichte jedoch die Zeit während des Praktikums nicht aus.

Zunächst müsste untersucht werden, wie man die numerische Stabilität für große Verschiebungen verbessern kann, zum Beispiel durch einen Ansatz mit anderen Finiten Differenzen. Selbstverständlich müssen dann die kompletten Randbedingungen am freien Rand berücksichtigt werden. Um echtzeitfähig zu werden, muss außerdem die Laufzeit wesentlich verkürzt werden. Dies kann zum Beispiel durch eine effizientere Implementierung der Energiefunktion, z. B. in Anlehnung an effiziente Algorithmen, die in der Computergrafik verwendet werden (siehe [15–17]), sowie durch ein effizienteres, an das Modell angepasstes Optimierungsverfahren erreicht werden. Zusätzlich kann untersucht werden, ob sich dieses Modell auch zur Berechnung von Spannungen, Kräften und Momenten eignet. Im Hinblick auf die Reifenmodellierung muss das Modell auf Schalen erweitert werden. Dazu sind geeignete Parametrisierungen und Diskretisierungen notwendig um die Vorkrümmung sinnvoll darzustellen. Desweiteren könnte das Modell noch um Scherung sowie dynamische Effekte erweitert werden.

Es bleiben also noch viele Möglichkeiten offen, sich weiter mit diesem Thema zu beschäftigen.

Literaturverzeichnis

- [1] J. Linn and T. Stephan, *Cable simulation for the IPS automatic path planning environment: A brief introduction to the approaches of modelling and numerical methods*, Fraunhofer Institut Techno- und Wirtschaftsmathematik, Kaiserslautern, March 2006.
- [2] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Elastizitätstheorie*, 7. unveränderte Auflage, Lehrbuch der Theoretischen Physik, Bd. VII, Akademie-Verlag GmbH, Berlin, 1991. Ges. – ISBN 3-05-500063-3, Bd. VII – ISBN 3-05-500580-5.
- [3] M. P. do Carmo, *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, 3. Auflage 1993, Nachdruck 1998, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1998. ISBN 3-528-27255-4.
- [4] D. Terzopoulos, J. Platt, A. Barr, and K. Fleischer, *Elastically Deformable Models*, Computer Graphics, vol. 21, No 4, July 1987, pp. 205–214.
- [5] S. P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, Second Edition, International Student Edition, McGraw-Hill Book Company, Inc. Copyright, 1940, by the United Engineering Trustees, Inc. Library of Congress Catalog Card Number 58-59675.
- [6] *fminunc*, Documentation Optimization Toolbox, The MathWorks, Inc., available at <http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/optim/ug/fminunc.html>.
- [7] T. Slawig, *Algorithmisches Differenzieren in Simulation und Optimalsteuerung von Differentialgleichungen*, Technical Report 2005/14, Preprint Reihe des Instituts fuer Mathematik, Technische Universitaet Berlin, available at http://www.math.tu-berlin.de/preprints/files/optpde/ppr2005_14.pdf.
- [8] *Automatic Differentiation by OverLoading in C++*, Institut für Wissenschaftliches Rechnen, TU Dresden, available at <http://www.math.tu-dresden.de/~adol-c>.
- [9] *MEX-files Guide*, Product Support, The MathWorks, Inc., available at <http://www.mathworks.com/support/tech-notes/1600/1605.html>.
- [10] *Using the MATLAB Engine*, Documentation MATLAB, The MathWorks, Inc., available at http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/matlab_external/f29148.html.

- [11] E. Reissner, *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*, Journal of applied mechanics, vol. 12, 1945, pp. A69–A77.
- [12] ———, *Reflections on the theory of elastic plates*, Appl Mech Rev, vol. 38, November 1985, pp. 1453–1464.
- [13] C. A. Xenophontos, *Finite Element Computations for the Reissner-Mindlin Plate Model* (July 22, 1998). preprint.
- [14] COMSOL FEMLAB 3, *Structural Mechanics Module User's Guide*, Version: January 2004, FEMLAB 3.0, Copyright 1994-2004 by COMSOL AB, FEMLAB GmbH, Göttingen.
- [15] E. Grinspun, A. N. Hirani, M. Desbrun, and P. Schroeder, *Discrete Shells* (D. Breen and M. Lin, eds.), Eurographics/SIGGRAPH Symposium on Computer Animation, 2003.
- [16] M. Bergou, M. Wardetzky, D. Harmon, D. Zorin, and E. Grinspun, *A Quadratic Bending Model for Inextensible Surfaces* (K. Polthier and A. Sheffer, eds.), Eurographics Symposium on Geometry Processing, 2006.
- [17] A. I. Bobenko, *A conformal energy for simplicial surfaces*, TU Berlin, 22 May 2006.